La suma de 10 nombres naturals diferents i no nuls és igual a 108. Demostrau que entre ells n'hi ha dos, com a mínim, que són imparells.

És clar que la suma de 10 nombres naturals parells diferents i no nuls és més gran o igual que

$$2+4+6+8+10+12+14+16+18+20=110.$$

Així, doncs, els 10 nombres donats no poden ser tots ells parells.

Si només un d'ells fos senar, la seva suma (amb un sumand imparell i nou parells) seria imparella contra la hipòtesi de ser 108.

D'aquí resulta que n'hi ha dos de senars com a mínim.

Dues circumferències secants de radis a i b són interiors, i tangents en els punts P i Q, a una circumferència de radi r.

Si PQ passa per un dels punts d'intersecció de les dues primeres, demostrau que $r = a + b$.

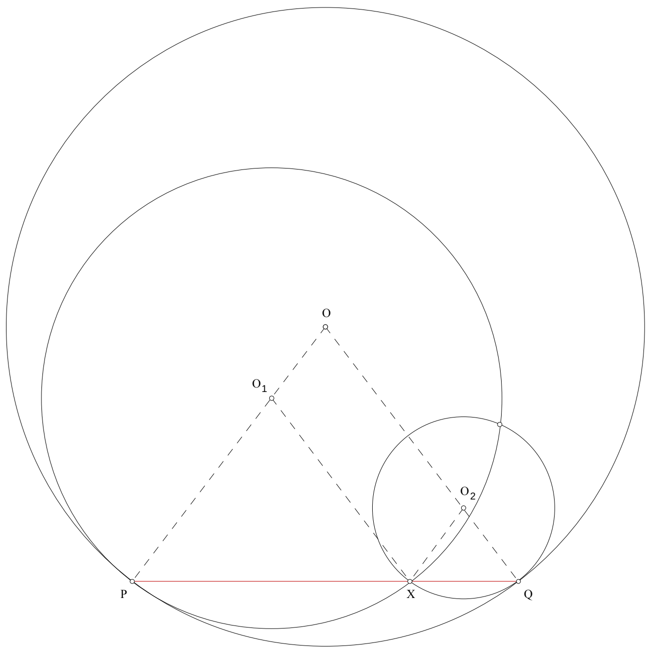
Siguin O, O_1 i O_2 els respectius centres de les circumferències de radis r, a i b.

Sigui P el punt de tangència de les circumferències de centres O i O_1. Llavors O_1 és un punt interior del segment OP i O_2 és un punt interior del segment OQ.

Atès que el triangle OPQ és isòsceles, serà $\angle PQO = \angle OPQ$. I atès que el triangle O_1PX també es isòsceles,

$$\angle PXO_1 = \angle O_1PX$$

$$= \angle OPQ \quad \text{ja que } P,\ X \text{ i } Q \text{ estan alineats.}$$



En resulta que $\angle PQO = \angle PXO_1$, d'on $O_1X \parallel OQ$. És a dir, $O_1X \parallel OO_2$. De la mateixa manera tenim que $XO_2 \parallel OO_1$.

Per tant, el quadrilàter OO_1XO_2 és un paral·lelogram. Així, doncs,

$$OO_1 = XO_2$$

o sigui

$$OP - O_1P = XO_2$$

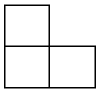
això és

$$r - a = b$$

i

$$r = a + b$$

Hem acolorit 29 quadrats unitaris d’una graella 7×7. Vegeu si és que hi ha alguna figura del tipus

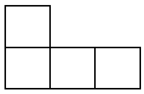


(no necessàriament amb l’orientació que es veu al dibuix) amb les tres caselles acolorides.

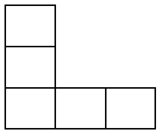
Provarem que la resposta és que sí.

Demostrarem que si pintam tal com ens indica l’enunciat, sempre podem trobar una figura del tipus donat amb les tres caselles pintades.

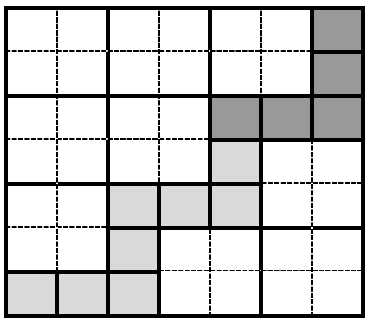
Dividim la graella 7×7 en 9 quadrats 2×2, dues figures com la següent



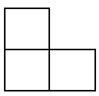
i una figura com la que segueix



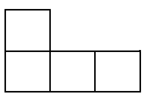
tal com es mostra:



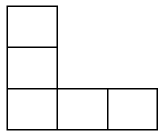
Si ho hi ha cap figura del tipus



amb les tres caselles acolorides, aleshores hem pintat, com a màxim, $2\cdot 9+3\cdot 2+4=28$ caselles: cada quadrat 2×2 conté, com a màxim, 2 caselles acolorides, cada figura com



conté, com a màxim, 3 caselles acolorides i la figura



conté, com a màxim, 4 caselles acolorides.

Així, doncs, tenim una contradicció.

Demostrau que per a qualssevol nombres reals x, y, z es compleix que almenys un dels nombres $(x+y+z)^2-2xy$, $(x+y+z)^2-2yz$, $(x+y+z)^2-2zx$ és més gran o igual que zero.

Procedim per reducció a l'absurd, que consisteix a suposar que els nombres $(x+y+z)^2-2xy$, $(x+y+z)^2-2yz$, $(x+y+z)^2-2zx$ són negatius i veure que s'arriba a una contradicció.

Suposem que $(x+y+z)^2-2xy<0$, $(x+y+z)^2-2yz<0$ i $(x+y+z)^2-2zx<0$. D'aquí resulta

$$3(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx<0$$

que, després de simplificada, queda

$$3x^2+3y^2+3z^2+4xy+4yz+4zx<0$$

i que es pot reescriure com

$$2(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2<0$$

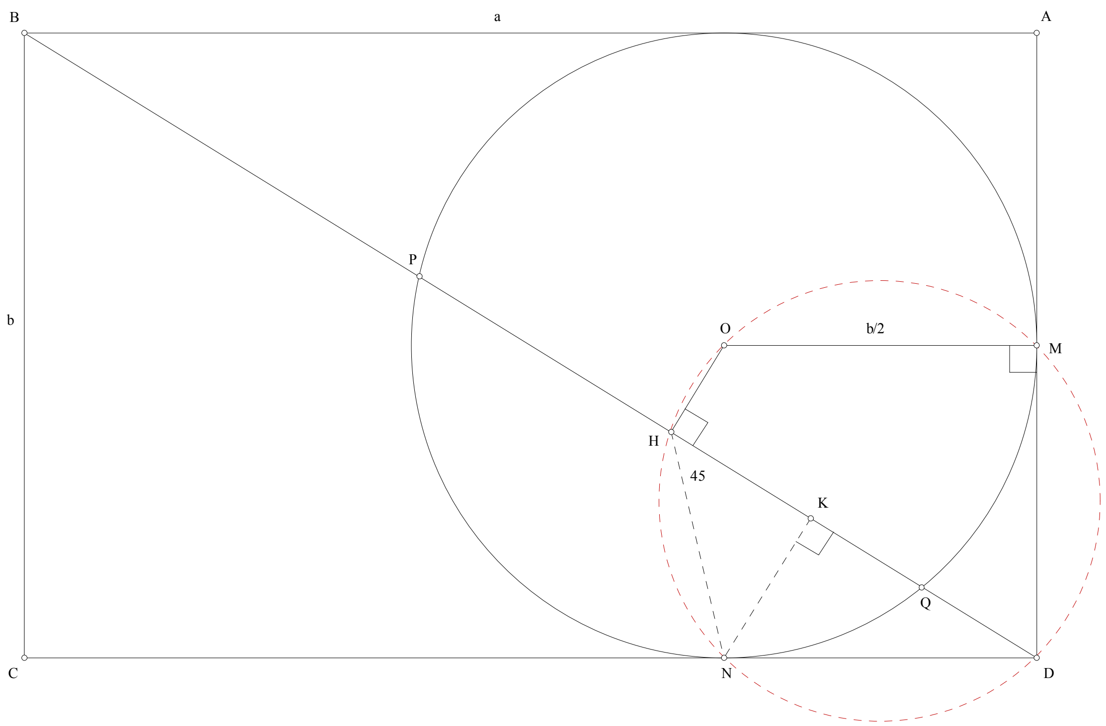
contra la hipòtesi de ser x, y, z reals.

Sigui $ABCD$ un rectangle amb $AB > BC$. Una circumferència tangent als costats AB, CD i DA, tal com es mostra a la figura adjunta, talla la diagonal BD en els punts P i Q.

Expressau, en funció de AB i de BC, la longitud del segment PQ.

Solució 1

Sigui O el centre de la circumferència donada i H el peu de la perpendicular des de O a BD. Siguin M i N els respectius punts de contacte de la circumferència amb DA i CD.



Com que $\angle OHD = 90^\circ = \angle DMO$, els punts O, H, D, M són concíclics.

Com que $ONDM$ és un quadrat, els punts O, N, D, M són concíclics. Observi's que el costat de $ONDM$ és $\frac{b}{2}$.

Així, doncs, els punts O, H, N, D, M són concíclics.

Sigui K el peu de la perpendicular des de N a BD.

Doncs $\Delta DNK \approx \Delta DBC$, tenim $\frac{DK}{ND} = \frac{CD}{BD}$ i $\frac{NK}{ND} = \frac{BC}{BD}$, o sigui, $\frac{DK}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\frac{NK}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, d'on

$$DK = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{i} \quad NK = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \quad .$$

Com que $\angle KHN = \angle DHN = \frac{90^{\text{o}}}{2} = 45^{\text{o}}$, el triangle KHN és isòsceles amb $KH = NK$ i, per tant,

$$DH = DK + KH = DK + NK = \frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b(a+b)}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

El teorema de Pitàgoras, aplicat al triangle DMO, dóna $OD = DM \cdot \sqrt{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ i, com que $OP^2 - PH^2 = OD^2 - DH^2$, resulta

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - PH^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2(a+b)^2}{4(a^2+b^2)}$$

d'on $PH = \frac{b\sqrt{2ab}}{2\sqrt{a^2+b^2}}$, i

$$PQ = b\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

ja que H és el punt mitjà de la corda PQ.

Solució 2

La potència del punt D respecte de la circumferència donada és $DQ \cdot DP$ i també DN^2. Així, doncs,

$$DQ \cdot DP = DN^2$$

o sigui,

$$(DH - QH) \cdot (DH + HP) = DN^2$$

això és, d'acord amb el raonament i resultats de la solució anterior,

$$\left(DH - \frac{PQ}{2}\right)\left(DH + \frac{PQ}{2}\right) = DN^2,$$

$$\frac{b^2(a+b)^2}{4(a^2+b^2)} - \frac{PQ^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

i

$$PQ = b\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

Trobau les solucions reals de l'equació

$$x^2 - 5[x] + 3 = 0\,,$$

essent $[x]$ la part entera de x. (La *part entera* d'un nombre real x és el nombre enter més gran que és més petit o igual que x).

Com que $x^2 - 5[x] + 3 = 0$, serà $[x] = \dfrac{x^2+3}{5} > 0$, la qual cosa ens diu que la part entera del nombre x és un nombre natural no nul. I atès que $[x] \le x < [x]+1$, tenim

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5[x] + 3 \\ &\ge [x]^2 - 5[x] + 3 \end{aligned}$$

d'on

$$[x] \in \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right)$$

o sigui,

$$[x] \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Si $[x] = 1$, aleshores $1 \le x < 2$ i, per tant, $x = 1 + \alpha$ amb $\alpha \in [0, 1)$. En substituir aquests valors a l'equació donada obtenim

$$(1+\alpha)^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$$

que, després de desenvolupada i simplificada, queda de la forma:

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

l'única solució admissible de la qual és $\alpha = \sqrt{2} - 1$. Així, doncs, $x = \sqrt{2}$.

Si $[x] = 2$, aleshores $2 \le x < 3$ i, per tant, $x = 2 + \alpha$ amb $\alpha \in [0, 1)$. En substituir aquests valors a l'equació donada obtenim

$$(2+\alpha)^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 0$$

que, després de desenvolupada i simplificada, queda de la forma:

$$\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$$

l'única solució admissible de la qual és $\alpha = \sqrt{7} - 1$. Així, doncs, $x = \sqrt{7}$.

Repetint el raonament amb $[x] = 3$ i $[x] = 4$ obtenim respectivament $x = 2\sqrt{3}$ i $x = \sqrt{17}$.

Les solucions són $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$ i $\sqrt{17}$.