Sigui ABC un triangle amb $\angle BAC = 120^{\circ}$. Siguin E i F els peus de les altures pels vèrtexs B i C, respectivament, i D el punt mitjà del costat BC.

Demostrau que el triangle DEF és equilàter.

Atès que $\angle BEC = 90^{\circ} = \angle BFC$, els punts E i F pertanyen a la circumferència de diàmetre BC. I atès que el centre d'aquesta circumferència és el punt D, resulta

$$DE = DF \qquad (1)$$

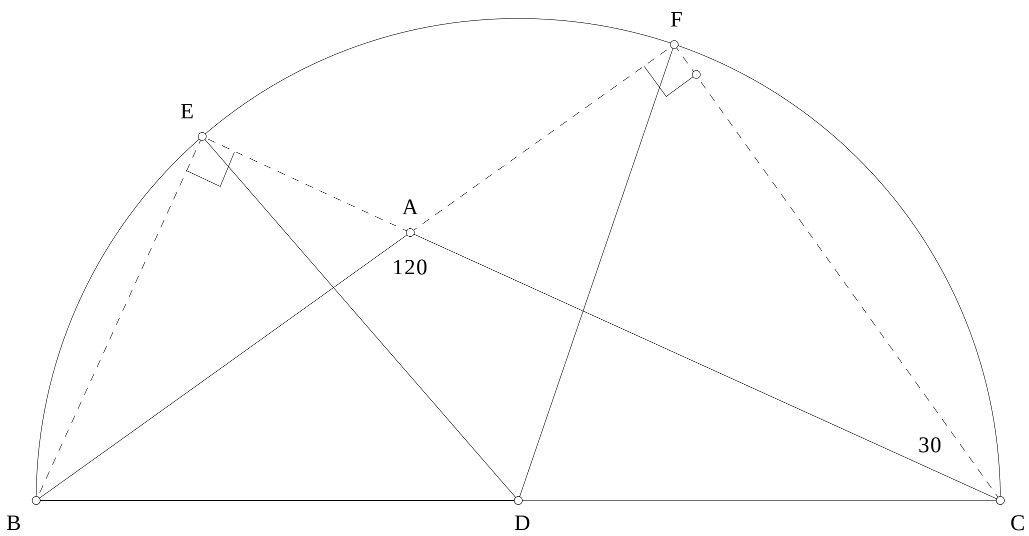
Per altra banda, considerant el triangle FAC, resulta

$$\begin{aligned} \angle ACF &= \angle BAC - \angle CFA \\ &= 120^{\circ} - 90^{\circ} \\ &= 30^{\circ} \end{aligned}$$

i, pel teorema de l'angle inscrit,

$$\begin{aligned} \angle EDF &= 2 \cdot \angle ECF \\ &= 2 \cdot \angle ACF \\ &= 2 \cdot 30^{\circ} \\ &= 60^{\circ} \end{aligned}$$

Així, doncs, el triangle DEF és equilàter ja que és isòsceles (1) i un dels seus angles fa 60°.



Els nombres a, b, c i d compleixen

$$a=\sqrt{4-\sqrt{5-a}}\,,\quad b=\sqrt{4+\sqrt{5-b}}\,,\quad c=\sqrt{4-\sqrt{5+c}}\,,\quad d=\sqrt{4+\sqrt{5+d}}$$

Calculau el producte $abcd$.

Els nombres a i b són solucions de l'equació $x^4-8x^2+x+11=0$; c i d són solucions de l'equació $y^4-8y^2-y+11=0$. Resulta que a, b, $-c$ i $-d$ són les arrels del polinomi $x^4-8x^2+x+11=0$, el producte de les quals val doncs 11.

Per tant,

$$abcd=ab(-c)(-d)=11$$

Demostrau que si a, b i c són nombres reals positius i $3abc=1$, aleshores es compleix la desigualtat:

$$\frac{3a^5}{3a^5+2bc}+\frac{3b^5}{3b^5+2ca}+\frac{3c^5}{3c^5+2ab}\geq 1$$

En quines condicions hi ha igualtat?

$$\frac{a^4}{a^4+\left(b^4+c^4\right)}\leq\frac{a^4}{a^4+2b^2c^2}=\frac{a^5}{a^5+2ab^2c^2}=\frac{a^5}{a^5+2bc\cdot\underbrace{(abc)}_{=\frac{1}{3}}}=\frac{3a^5}{3a^5+2bc}$$

i per tant,

$$\sum_{\text{cíclica}}\frac{3a^5}{3a^5+2bc}\geq\sum_{\text{cíclica}}\frac{a^4}{a^4+b^4+c^4}=1$$

Hi ha igualtat si i només si $a=b=c$.

Provau que entre set nombres naturals quadrats perfectes, n'hi ha almenys dos la diferència dels quals és múltiple de 20.

Atès que un nombre natural quadrat perfecte acaba en un del sis dígits 0, 1, 4, 5, 6, 9, almenys dos dels set quadrats donats, siguin a^2 i b^2, acaben en la mateixa xifra.

Aleshores $a^2 - b^2$ acaba en zero i això implica que $a^2 - b^2$ és múltiple de 5.

Doncs a^2 i b^2 acaben en la mateixa xifra, és clar que ambdós són parells o ambdós són imparells:

Si a^2 i b^2 són ambdós parells, també són parells els nombres a i b. Tendrem $a = 2m$, $b = 2n$, amb m i n nombres enters, i $a^2 - b^2 = 4(m^2 - n^2) = \dot{4}$.

Si a^2 i b^2 són ambdós imparells, també són imparells els nombres a i b. En aquest cas, $a = 2m+1$, $b = 2n+1$ i $a^2 - b^2 = 4(m-n)(m+n+1) = \dot{4}$.

Així, doncs, $a^2 - b^2$ serà múltiple del mínim comú múltiple de 4 i 5 i hem acabat.

Trobau tots els enters b i c tals que l'equació $x^2 - bx + c = 0$ té dues arrels reals α i β que compleixen $\alpha^2 + \beta^2 = 5$.

Atés que $\alpha + \beta = b$ i $\alpha\beta = c$, obtenim $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = b^2 - 2c$. I atès que el discriminant de l'equació és $b^2 - 4c$, s'han de complir simultàniament les relacions

$$b^2 - 2c = 5$$

i

$$b^2 - 4c > 0$$

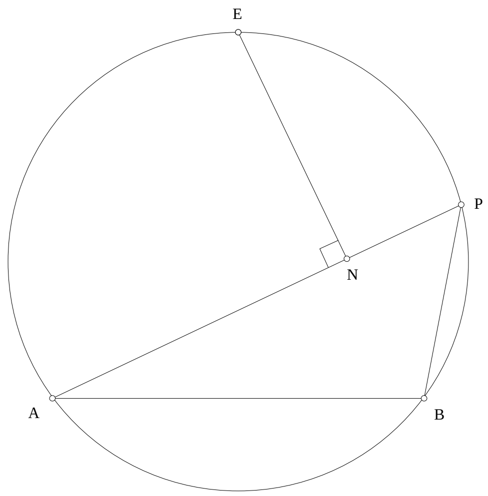
Amb aquestes condicions es veu immediatament que els únics valors de b i c són

$$b = \pm 3,\ c = 2 \quad \text{i} \quad b = \pm 1,\ c = -2$$

Siguin A i B dos punts donats d'una circumferència i E el punt mitjà de l'arc AB, tal com es mostra a la figura.

Escollit un punt P de l'arc AB, sigui N el peu de la perpendicular a AP per E.

Provau que $AN = NP + PB$.



Sigui Q el segon punt d'intersecció de EN amb la circumferència i R el punt d'intersecció de AN i BQ.

Si D és el punt de la circumferència diametralment oposat a E, aleshores D és el punt mitjà de l'arc AB que no conté E i PD és bisectriu de $\angle APB$.

Atès que $\angle DQE = 90^{o} = \angle ANE$, tenim $AN \| DQ$. Per tant, les cordes AP i DQ són paral·leles i

$$\begin{aligned} \text{arc}\, PQ &= \text{arc}\, AD \\ &= \text{arc}\, DB \end{aligned}$$

En conseqüència,

$$\begin{aligned} \angle QRA = \angle BRA = \angle BRP &= \angle BPA - \angle PBR \\ &= 2 \cdot \angle DPA - \angle DPA \\ &= \angle DPA \\ &= \angle PAQ \end{aligned}$$

d'on resulta que $RB \| PD$, ΔAQR és isòsceles amb $AQ = QR$ i, conseqüentment, N és el punt mitjà del segment AR.

Si $K = AB \cap PQ$, els teoremes de la bisectriu i de Thales dónen

$$\frac{PB}{PA} = \frac{KB}{KA} = \frac{PR}{PA},$$

d'on

$$PB = PR \ .$$

Finalment,

$$AN = NR = NP + PR = NP + PB$$