Problema 6

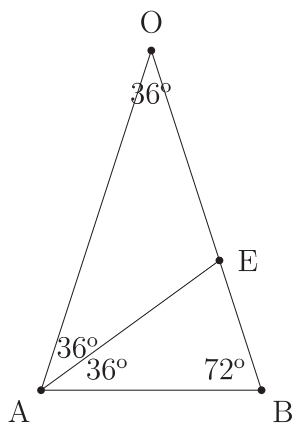
Demostrau que existeix un triangle rectangle els costats del qual són el costat del pentàgon regular, el costat del hexàgon regular i el del decàgon regular, essent aquets tres del mateix radi.

(S'anomena *radi d'un polígon regular* el radi de la seva circumferència circumscrita).

PRIMERA SOLUCIÓ.

Aquesta demostració fa servir el fet, ben conegut, que el costat del decàgon regular és el segment auri del seu radi. En efecte, sigui $\triangle OAB$ isòsceles amb $OA = OB$ i $\angle AOB = 36°$. Llavors AB és el costat del decàgon regular de radi OA $(= OB)$.

Sigui E el peu de la bisectriu de $\angle OAB$. Els triangles OAE i ABE són isòsceles. Així, $OE = EA$ i $EA = AB$, d'on resulta $OE = AB$.



Per altra banda, els triangles OAB i ABE són semblants. Per tant, $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{BE}$. I com que $\frac{AB}{BE} = \frac{AB}{OB-OE} = \frac{AB}{OA-AB}$, pel que hem vist, obtenim $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{OA-AB}$, és a dir,

$$AB^2 = OA\,(OA - AB) \tag{1}$$

Per tant, el costat AB del decàgon regular és segment auri del seu radi OA, per la definició de segment auri.

Aleshores, sigui AB el costat d'un decàgon regular de centre O i circumferència circumscrita Γ.

Sigui C el punt de la recta AB, a continuació de B, tal que $AC = OA$. Per construcció, el triangle OAC és isòsceles. I atès que $\angle OAC = \angle OAB = 72°$ (perquè $\angle AOB = \frac{360°}{10} = 36°$), resulta que OC és el costat del pentàgon regular del mateix radi que el del decàgon.

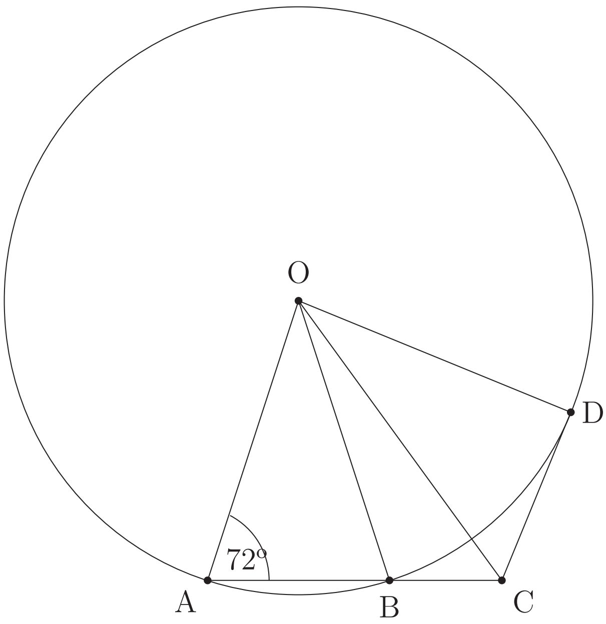
Anem a veure ara que si D és el punt de tangència d'una de les rectes tangents per C a Γ, llavors el segment de tangent CD té la mateixa longitud que el costat del decàgon:

en efecte, d'una banda es compleix que $CD^2 = CA \cdot CB$ i, de l'altra, per (1), essent AC el radi del decàgon i AB el costat, tenim

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA(CA - AB) \\ &= CA \cdot CB \end{aligned}$$

Així, doncs, $CD^2 = AB^2$ i $CD = AB$.

El triangle OCD és rectangle; OD és el costat del hexàgon regular, CD el costat del decàgon i OC el costat del pentàgon. Això acaba la demostració.



SEGONA SOLUCIÓ.

Sabem que una corda d'angle central θ en una circumferència de radi r val $2r\sin\frac{\theta}{2}$. El costat del pentàgon regular té longitud $2r\sin 36°$, el costat del decàgon regular té longitud $2r\sin 18°$ i el del hexàgon val r.

El nostre problema es redueix a demostrar que $(2r\sin 18°)^2 = (2r\sin 18°)^2 + r^2$ o sigui $4\sin^2 36° = 4\sin^2 18° + 1$, que escrivim com $4\,(1 - \cos^2 36°) = 2(1 - \cos 36°) + 1$ i el problema s'acaba si podem comprovar que

$$4\cos^2 36° - 2\cos 36° - 1 = 0 \tag{2}$$

Atès que en el decàgon regular el costat és segment auri del radi, amb les notacions de la figura primera, tenim $AB = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) OA$, és a dir, $\frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. I atès que

$$\begin{aligned} \cos 36° &= \frac{\frac{1}{2}OA}{OE} \qquad \text{(perquè } \triangle OAE \text{ és isòsceles)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}OA}{AB} \end{aligned}$$

resulta $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. La comprovació de (2) és immediata.

Una altra manera de determinar el valor de $\cos 36°$ la trobam a la següent *coda*:

Tenim
$$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$$
i
$$\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$$
per tant,
$$\sin 36^\circ \sin 72^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \sin 36^\circ \cos 36^\circ$$
i com que $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$, obtenim
$$4\cos 36^\circ \sin 18^\circ = 1$$
que escrivim (utilitzant la identitat $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \sin\beta$) en la forma
$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$$
equivalent a
$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2} \tag{3}$$
Tenim també
$$\begin{aligned}(\cos 36^\circ + \sin 18^\circ)^2 &= (\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)^2 + 4\cos 36^\circ \sin 18^\circ \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 \\ &= \tfrac{5}{4}\end{aligned}$$
i per tant
$$\cos 36^\circ + \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$
Sumant (3) i (4), $2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, és a dir, $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$