Problema 5

Demostrau que en tot conjunt de 4 nombres enters, cubs perfectes, sempre n'hi ha dos la diferència dels quals és divisible per 7.

PRIMERA SOLUCIÓ.

L'afirmació del problema és òbvia si dos dels cubs són divisibles per 7. N'hi ha prou, idò, en considerar el cas que tres d'ells, que designarem per a^3, b^3, c^3, no siguin divisibles per 7.

Observam que cap dels a, b, c és divisible per 7 i que tot nombre enter que no sigui divisible per 7 en dividir-lo per 7 donarà residus 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Això ens permet classificar el conjunt dels enters no divisibles per 7 en dues classes disjuntes, possant a una d'elles els nombres que donin residu 1, 2, 4 en dividir-los per 7 i a l'altra els que donin residu 3, 5, 6.

Així, dels a, b, c, n'hi ha almenys dos, que suposarem són a i b, que pertanyen a la mateixa classe.

Si a i b donen el mateix residu, aleshores $a - b$ és divisible per 7.

Si a i b no donen el mateix residu, un càlcul directe mostra que $a^2 + ab + b^2$ és divisible per 7.

I essent $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$, resulta que $a^3 - b^3$ és divisible per 7, com es volia.

SEGONA SOLUCIÓ.

Observem que tot nombre enter o serà múltiple de 7, o en dividir-lo per 7 donarà residus 1, 2, 3, 4, 5, o 6. Això ens permet comprovar immediatament que el cub d'un enter és d'una de les formes $7n$, $7n + 1$ o $7n + 6$, on n representa un nombre enter.

Pel principi de Dirichlet, segur que almenys dos dels quatre cubs són de la mateixa forma que alguna de les tres esmentades i, per tant, la seva diferència és un múltiple de 7.