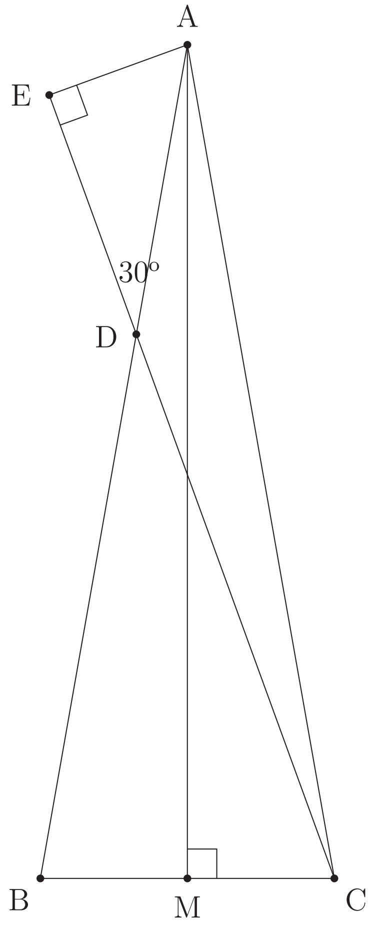
Problema 3

Sigui ABC un triangle isòsceles amb $AB = AC$ i $\angle BAC = 20°$. Sigui D el punt del costat AB tal que $\angle BDC = 30°$. Demostrau que $AD = BC$.

PRIMERA SOLUCIÓ.

Sigui E el peu de la perpendicular a la recta CD per A. El teorema de l'angle exterior aplicat al triangle ADC en el vèrtex D dóna $\angle DCA = 30° - 20° = 10°$, o bé $\angle ECA = 10°$.

Per altra banda, com que $AB = AC$, si M és el punt mitjà del segment BC, tenim $\angle MAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 10°$.



Així, els triangles rectangles AEC i AMC són iguals ja que tenen iguals la hipotenusa i un angle agut. Per tant,

$$EA = MC$$

la qual cosa és equivalent a la igualtat proposada ja que, tenint en compte que en el triangle rectangle EDA l'angle EDA es igual a 30°, tenim $EA = \frac{1}{2}AD$, i tenint en compte que M és el punt mitjà del segment BC, tenim $MC = \frac{1}{2}BC$.

SEGONA SOLUCIÓ.

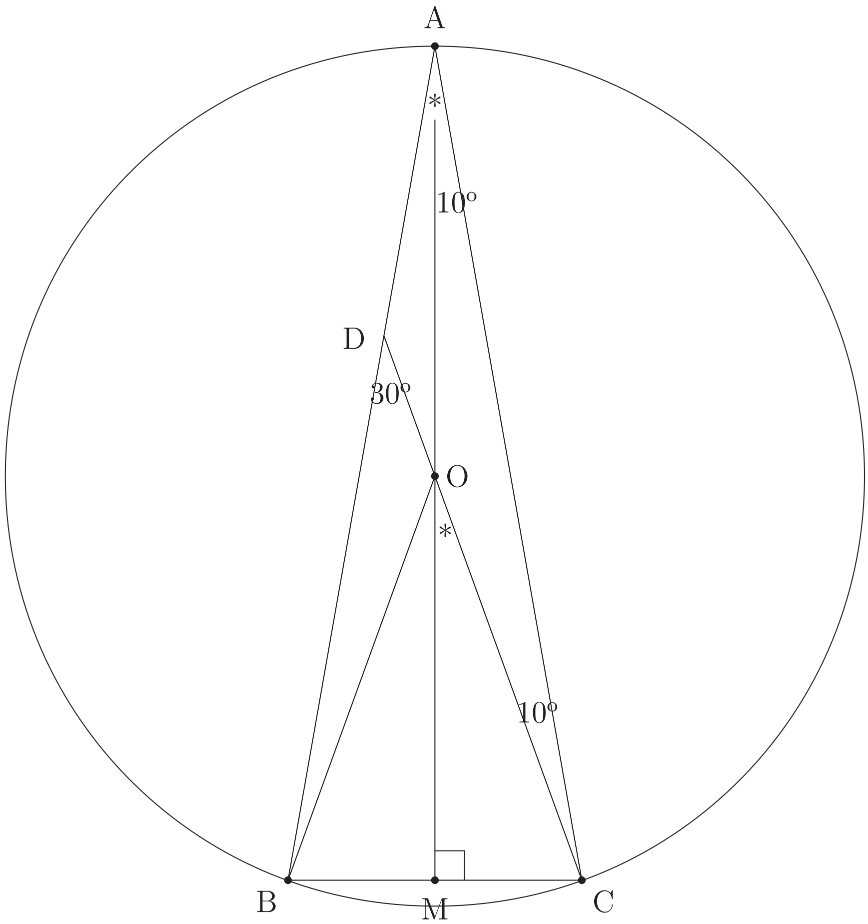
Sigui M el punt mitjà del costat BC. Definim $AM \cap BC = \{O\}$.

Tenint en compte la solució anterior, tenim $OA = OC$. Com que $OC = OB$ (els triangles rectangles OMB i OMC tenen els corresponents catets iguals), el punt O equidista dels tres vèrtexs i és, per tant, el circumcentre del triangle ABC. Essent $\triangle ABC$ acutangle, el punt O és interior i $\angle MOC$ és la meitat de l'angle central comprès per l'angle inscrit $\angle BAC$. Així, doncs,

$$\begin{aligned} MC &= OC \cdot \sin \angle MOC \\ &= OC \cdot \sin \angle BAC \end{aligned}$$

o bé,

$$BC = 2 \cdot OC \cdot \sin \angle BAC \tag{1}$$



El teorema del sinus aplicat al triangle ADO, en el qual $\angle ADO = 180° - \angle BDC = 180° - 30° = 150°$ i $\angle DOA = \angle MOC = \angle BAC$, dóna

$$\frac{AD}{\sin \angle DOA} = \frac{OA}{\sin \angle ADO}$$

o sigui

$$\begin{aligned} \frac{AD}{\sin \angle BAC} &= \frac{OA}{\sin 150^\circ} \\ &= \frac{OA}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'on

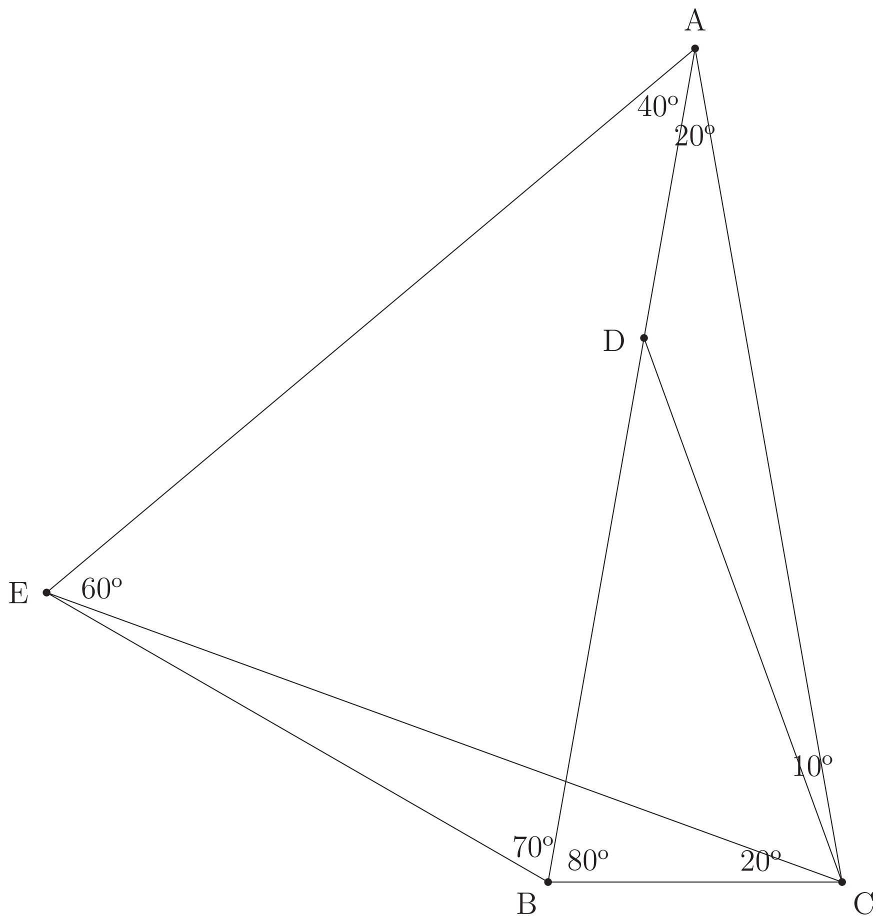
$$AD = 2 \cdot OA \cdot \sin \angle BAC \tag{2}$$

Atès que $OA = OC$, de (1) i (2) resulta que $AD = BC$, que és allò que es volia demostrar.

TERCERA SOLUCIÓ

En el semiplà definit per AC i que conté B, consideram el punt E tal que $\angle EAB = 40^\circ$ i $\overline{AE} = \overline{AC}$, obtenim que:

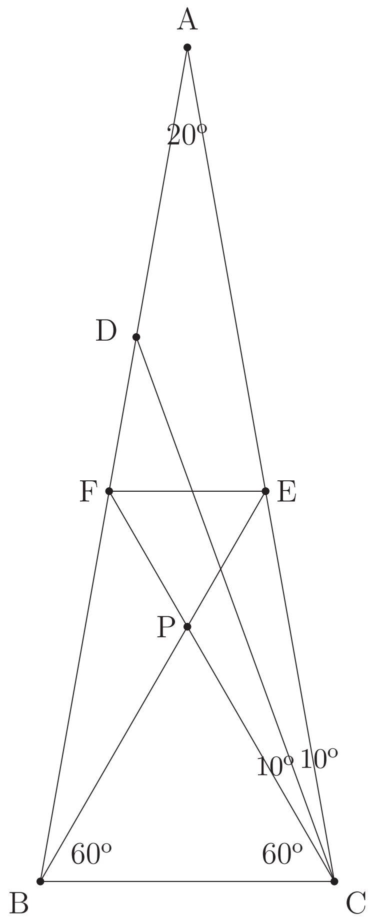
1. El triangle AEC és equilàter (és isòsceles i té un angle de 60°).
2. $\angle ECB = \angle DAC$ $(= 20^\circ)$.
3. $\angle BEC = \angle ACD$ $(= 10^\circ)$.



Llavors els triangles EBC i ADC són iguals (tenen iguals, respectivament, un costat i els seus angles contigus). En resulta que $AD = BC$, com es volia.

QUARTA SOLUCIÓ

Siguin E i F els respectius punts dels costats AC i AB tals que $\angle EBC = 60°$ i $\angle FCB = 60°$. Sigui $BE \cap CF = \{P\}$.



Llavors $FE \| BC$, els triangles BPC i FPE són equilàters, el triangle AFC és isòsceles amb $AF = FC$ i CD és la bisectriu de $\angle FCA$. Tenint tot això en compte, aplicam el teorema de la bisectriu al triangle AFC en C i obtenim

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AC}{CF} = \frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CP}{PF} \tag{3}$$

és a dir, $\frac{AD}{DF} = \frac{CP}{PF}$, d'on $\frac{AD}{DF} + 1 = \frac{CP}{PF} + 1$, o sigui

$$\frac{AF}{DF} = \frac{CF}{PF}$$

que implica

$$\begin{aligned} DF &= PF \quad \text{(perquè } AF = CF\text{)} \\ &= FE \end{aligned}$$

i, per (3), $AD = BC$, com es volia.