Problema 2

Provau que les arrels de l'equació $2x^2 - (m-2)x + 3m - 1 = 0$, on m és qualsevol nombre real, no poden ser ambdues enteres.

Per a quins valors enters de m té aquesta equació una arrel entera?

SOLUCIÓ.

Fem la demostració per reducció a l'absurd, que consisteix a suposar que ambdues arrels x_1, x_2 són enteres i veure que s'arriba a una contradicció.

Si x_1 i x_2 són nombres enters, també són enters els valors $S = x_1 + x_2 = \frac{m-2}{2}$ i $P = x_1 x_2 = \frac{3m-1}{2}$. Però $3S - P = \frac{-5}{2} \notin \mathbb{Z}$, contra el fet de ser $S \in \mathbb{Z}$ i $P \in \mathbb{Z}$.

Aïllam m en l'equació $2x^2 - (m-2)x + 3m - 1 = 0$ i obtenim

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{2x^2+2x-1}{x-3} \\ &= 2x + 8 + \tfrac{23}{x-3} \end{aligned}$$

D'aquí resulta que, si x és un nombre enter, m serà enter si i només si $x - 3$ divideix 23. Com que els divisors de 23 són ± 1, ± 23 haurà de ser $x - 3 = -23, -1, 1, 23$ i per tant $x = -20, 2, 4, 26$.

Aquests valors ens proporcionen les solucions $m = -33, -11, 39, 61$.