Problema 6

Siguin ABD i ACE triangles equilàters construïts sobre els costats AB i AC d'un triangle acutangle ABC, al seu exterior.

Siguin F i G els punts d'intersecció de les rectes CD i BE amb AB i AC, respectivament, i P la intersecció de CD amb BE.

Si el quadrilàter $AFPG$ i el triangle PBC tenen la mateixa àrea, determinau el valor de l'angle BAC.

1. $\triangle ADC$ i $\triangle AEB$ són iguals ($AD = AB, AC = AE$ i $\angle DAC = 60° + \angle BAC = \angle BAE$).

   Per tant,
   $$\angle DCA = \angle BEA \tag{1}$$

2. Atès que
   $$\begin{aligned}
   \tfrac{AF}{FB} &= \frac{\text{area } \triangle AFC}{\text{area } \triangle FBC} \\
   &= \frac{\text{area quadrilàter } AFPG + \text{area triangle } GPC}{\text{area triangle } PBC + \text{area triangle } FBP} \\
   &= \frac{\text{area triangle } PBC + \text{area triangle } GPC}{\text{area quadrilàter } AFPG + \text{area triangle } FBP} \\
   &= \frac{\text{area } \triangle CGB}{\text{area } \triangle GAB} \\
   &= \tfrac{CG}{GA}
   \end{aligned}$$

   resulta $\frac{AF+FB}{FB} = \frac{CG+GA}{GA}$, o sigui $\frac{AB}{FB} = \frac{CA}{GA}$, això és $\frac{DB}{FB} = \frac{EA}{GA}$, que implica $\triangle DBF \sim \triangle EAG$ (costat-angle-costat).

   Per tant, $\angle BDF = \angle GEA$, és a dir,
   $$\angle BDC = \angle BEA \tag{2}$$

3. De (1) i (2), $\angle BDC = \angle DCA$, que obliga a $DB \parallel CA$ i, per tant,
   $$\begin{aligned}
   \angle BAC &= \angle DBA \\
   &= 60°
   \end{aligned}$$