Problema 5

Quants nombres capicues de cinc xifres són divisibles per 37 ?

El problema és equivalent a determinar quants nombres naturals de la forma $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$, $a \neq 0$, hi ha que siguin divisibles per 37.

Sigui $n = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$. Observam que

$$\begin{aligned} n &= a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a \\ &= a\,(37 \cdot 270 + 10) + b\,(37 \cdot 27 + 1) + c\,(37 \cdot 3 - 11) + b \cdot 10 + a \\ &= 37\,(270a + 27b + 3c) + 11\,(a + b - c) \end{aligned}$$

i que $37\,(270a + 27b + 3c)$ és múltiple de 37 per qualssevol valors enters de a, b, c. Per tant el problema queda reduït a trobar tots els dígits a, b, c tals que $11\,(a + b - c)$ és múltiple de 37 i atès que 11 i 37 són primers entre ells, amb aquestes condicions, ha de ser $a + b - c = 0$, és a dir, $c = a + b$.

Si $c = 0$, no hi ha solució vàlida.

Si $c = 1$, els únics valors de a i b són $a = 1$ i $b = 0$.

Si $c = 2$, els únics valors de a i b són $a = 2$, $b = 0$; $a = 1$, $b = 1$.

...

Si $c = 9$, els únics valors de a i b són $a = 9$, $b = 0$; $a = 8$, $b = 1$; ..., $a = 1$, $b = 8$.

En total, hi ha $1+2+3+\cdots+9 = 45$ nombres capicues de cinc xifres que són múltiples de 37.

Podem trobar un camí més curt aplicant congruències segons el mòdul 37. Es tè

$$\begin{array}{lclcll} 10^0 & \equiv & 1 & & & \pmod{37} \\ 10^1 & \equiv & 10 & & & \pmod{37} \\ 10^2 & \equiv & 26 & \equiv & -11 & \pmod{37} \\ 10^3 & \equiv & 1 & & & \pmod{37} \end{array}$$

A partir d'aquí, per les propietats de les congruències, els residus s'aniran repetint de 3 en 3 i es pot escriure

$$a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a \equiv 10a + b - 11c + 10b + a \pmod{37}$$

això és,

$$n \equiv 11\,(a + b - c) \pmod{37}$$

és a dir, que els nombres n i $11\,(a + b - c)$ donen el mateix residu en dividir-los per 37.