Problema 2

Sigui P un punt a l'interior d'un quadrat $ABCD$ tal que $AB = AP$. Si la recta AP talla el costat BC en el punt X i la recta BP talla el costat CD en el punt Y, provau que $BX > 2 \cdot CY$.

Solució 1.

Sigui M el punt mitjà del segment BP i Z el punt d'intersecció de la recta AM amb el costat BC. Per hipòtesi, el triangle ABP és isòsceles. Per tant, AM és l'altura corresponent al vèrtex A. També és la bisectriu de $\angle BAP$.

Llavors els triangles rectangles ABZ i BCY són iguals (tenen iguals un catet i el corresponent angle agut), amb $BZ = CY$.

Però com que $AX > AB$, tenim que $ZX > BZ$ (pel teorema de la bisectriu, $\frac{ZX}{BZ} = \frac{AX}{AB}$).

En resulta que

$$\begin{aligned} BX &= BZ + ZX \\ &> BZ + BZ \\ &= 2 \cdot CY \end{aligned}$$

Solució 2. Posam $\theta = \angle YBC$. Llavors $\angle BAX = \angle BAP = 2\theta$ (l'angle PBX és semiinscrit en la circumferència de centre A i radi AB), $CY = BC \cdot \tan\theta$ i $BX = AB \cdot \tan 2\theta$.

Tenim

$$\frac{BX}{CY} = \frac{AB \cdot \tan 2\theta}{BC \cdot \tan\theta} = \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta} = \frac{2}{1 - \tan^2\theta} > 2$$