Surfejant l’ona d’Agnesi

Soave sia il vento, tranquilla sia l'onda... (Così fan tutte, W. A. Mozart)

Enguany celebram el 300 aniversari del naixement (16 de maig de 1718) d’una de les matemàtiques més brillants de la història, Maria Gaetana Agnesi, coetània de Mozart. Dediquem-li una estona.

Agnesi, la persona

Maria Gaetana fou la major dels 21 fills que Pietro Agnesi tengué fruit dels seus tres matrimonis. La seva mare fou Anna Fortunato Brivio, membre d’una família de la noblesa italo-hongaresa i son pare, un ric comerciant de seda. És per això que Maria Agnesi es pogué formar a recer d’un ambient benestant i culte. Els seus progenitors, sensibles al seu talent extremadament precoç, li procuraren una formació científica, filosòfica i religiosa que per a qualsevol altre dona del seu temps hagués estat impensable.

Les seves gestes intel·lectuals obren la porta dels biògrafs a les exageracions, però sembla cert que el seu gust per l’argumentació i la seva facilitat per a les llengües va fer que, adolescent, ja pogués mantenir una conversa acadèmica, en italià, francès, alemany, espanyol, llatí, grec i hebreu. Ha fet fortuna històrica, també, la publicació del seu primer assaig filosòfic en llatí sobre el dret de les dones a l’educació, tot i que es pugui tractar d’un exercici o una traducció proposada pel seu tutor.

Els seus estudis estigueren sempre vinculats a la religió, no de bades en aquell segle la religió i la ciència anaven encara de la mà (no es poden entendre els Principia Mathematica de Newton si no és a l’ombra d’aquest paradigma). A mesura que s’anà fent gran, la seva dedicació altruista i l’estudi de les Sagrades Escriptures anaren guanyant terreny a les altres dedicacions.

No està clar si arribà a professar com a monja agustiniana, com era el seu desig de jove. Poc abans de la mort del seu pare, s’hauria compromès a no enclaustrar-se i a fer de mare per als seus germans i germanes, tot i que només quatre superaren la infància. Sigui com fos, el 1771 passà a dirigir un hospici de Milà, especialment dedicat a dones malaltes o desnonades, on ella mateixa moriria el 9 de gener de 1799 a l’edat de 80 anys.

Agnesi, matemàtica

Maria Gaetana tengué, probablement, els millors professors de Milà. Entre ells, matemàtics de la talla dels jesuïtes Saccheri i Ricatti (aquest, matemàtic com el seu pare Jacopo Francesco). Les matemàtiques eren una de les seves passions i tengué accés a la bibliografia més rellevant d’aquell moment, com podien ser les obres de Leibniz, Newton o L’Hôpital.

En la seva etapa de plenitud intel·lectual, dels vint als trenta anys, treballà de manera intensa en el camp del càlcul diferencial i publicà a Milà, l’any 1748, els dos volums de la seva principal obra: *Instituzioni analítiche ad uso della gioventù.* Aquesta obra, en dos volums, és un magnífic esforç de síntesi de l’àlgebra i dels càlculs diferencial i integral d’aquell moment de manera que, en molt poc temps, foren traduïts al francès i a l’anglès i ràpidament es convertiren en manuals universitaris de referència.

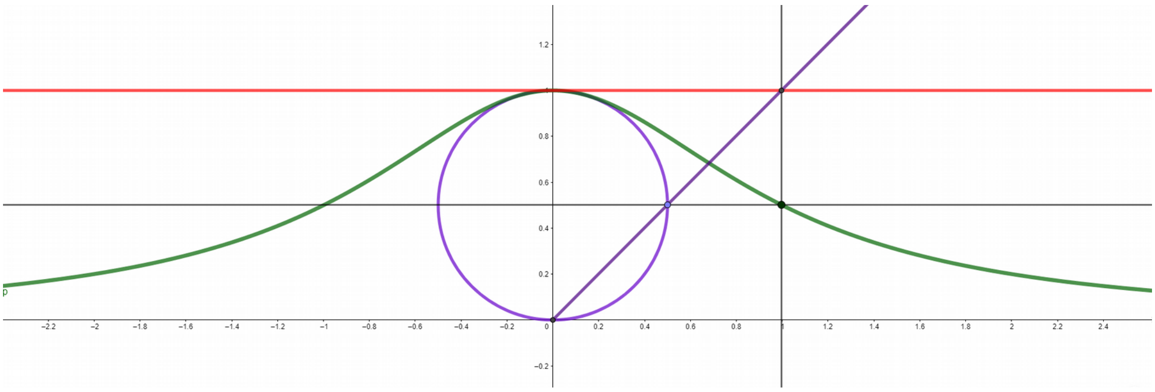
Un any després d’aquesta publicació, el 1749, el Papa Benet XIV la proposà per ensenyar matemàtiques a la Universitat de Bolonya, cosa que no arribar a acceptar mai. Quan la mort de son pare, el 1752, Maria Gaetana havia decidit ja dedicar-se en cos i ànima a la caritat.

La corba d'Agnesi

El nom de la matemàtica milanesa va indefectiblement unit al d'aquesta corba, una racional de tercer ordre. El detall d'una mala traducció ha contribuït també, sens dubte, a fer-la perdurable al llarg dels segles. La corba es troba descrita al seus *Instituzioni*. Allà es descriu aquesta *versiera*, paraula d'etimologia llatina encunyada per Guido Grandi. Però el cas és que també és la forma abreujada d'*aversiera* que en aquest cas significa bruixa. En la traducció històrica a l'anglès del llibre esmentat, la *versiera* passa a ser The witch of Agnesi (la bruixa d'Agnesi).

Se sap que aquesta corba ja havia estat estudiada abans per Pierre de Fermat (segle XVII) i per l'esmentat Grandi el 1703. Maria Gaetana l'obtingué a partir del seu plantejament geomètric, és a dir, com a lloc geomètric dels punts i, l'expressió algebraica que maneja, bescanvia els eixos cartesians.

<u>Plantejament</u>: entre dues rectes paral·leles de distància «a» traçam una circumferència tangent a les dues. Consideram una de les rectes l'eix d'abscisses amb origen al punt de tangència, de manera que l'equació de l'altra serà y = a. Es fa girar una semirecta amb origen al centre de coordenades, dins l'interval angular (0, 180º) que anirà tallant tots els punts de la circumferència. Així, la corba d'Agnesi és el lloc geomètric dels punts l'abscissa dels quals és la mateixa que l'abscissa del punt de tall entre la semirecta i la recta y= a i, l'ordenada, la mateixa que l'ordenada del punt de tall (diferent de zero) entre la semirecta i la circumferència (i que per tant variarà dins l'interval (0,a]). Gràficament:



Obtenir la seva expressió analítica és relativament senzill. Siguin

y = mx	(1) Semirecta amb origen a O(0,0)
y = a	(2) Paral·lela a l'eix OX tangent a la circumferència
$x^2 + (y - a/2)^2 = a^2$	(3) Circumferència de centre a C(0,a/2) i radi a/2

- Abscissa del lloc geomètric

Sistema (1) (2) ... x = a/m

- Ordenada del lloc geomètric

Sistema (1) (3) ... $y = am^2 / (1 + m^2)$

Si ara eliminam el paràmetre m

$$\boxed{y=\frac{a^3}{x^2+a^2}}$$

Construint l'ona d'Agnesi

La corba d'Agnesi és ideal per representar, per jugar-hi, per examinar a fons, en definitiva, per fer un treball exhaustiu amb alumnes de 2n de Batxillerat. Heus aquí alguns plantejaments.

- Activitat 1.

Feis servir el GeoGebra per generar la corba d'Agnesi. No ho faceu a partir de l'expressió analítica, sinó amb el criteri geomètric (activa el traç -botó dret- del punt intersecció).

- Activitat 2.

Imprimiu la corba obtinguda per a un interval d'abscisses aproximat de (-3a, 3a) en un foli apaïsat. Preniu ara un filferro, construïu aquest tros de corba dibuixada i parlau d'ella. (Aquí haurien de sortir moltes de les característiques de la corba: que és continua, infinita, simètrica, que presenta un màxim per a x= 0, que té una asímptota per a y= 0, que presenta dos punts d'inflexió...)

- Activitat 3

A partir de la corba construïda, amb un retolador permanent, intentau localitzar visualment el màxim, els punts d'inflexió (basta un d'ells), i els punts de màxima curvatura (si és que n'hi ha més d'un). Marcau-los en el paper imprès. (Amb aquesta activitat s'intenta fer un treball purament geomètric, totalment exempt d'àlgebra)

- Activitat 4

Feis el càlcul teòric dels punts marcats i comprovau la seva coincidència. (Aquí l'alumne haurà de fer ús de tres derivades successives per comprovar la seva perícia com a observador de punts singulars)

4.1. Màxim relatiu (i absolut) per a x= 0 (càlcul de la 1a derivada)

$$y' = -2\,a^3 x / (x^2 + a^2)^2$$

4.2. Punts d'inflexió per a ($x = a/\sqrt{3}$ i el seu simètric) (càlcul de la 2a derivada)

$$y'' = 2\,a^3 (3x^2 - a^2) / (x^2 + a^2)^3$$

4.3. Punts de màxima curvatura per a x= 0 (convexa, valor de curvatura negatiu, mínim absolut) i per a x= a (còncava, valor de curvatura positiu, màxims absoluts (amb el seu simètric, si tenim en compte el signe, de menor valor absolut que el primer) (càlcul de la 3a derivada)

$$y''' = -24\,a^3 x\,(x^2 - a^2) / (x^2 + a^2)^4$$

Observacions: és molt possible que els punts de màxima curvatura siguin difícils d'entendre com a derivada de la funció curvatura, però de cap manera no es poden deixar d'entendre a partir de l'aspecte geomètric constructiu (allà on s'ha de doblegar més el fil de ferro respecte dels punts veïnats). També és important veure i remarcar que els punt de curvatura nul·la són, efectivament, els punts d'inflexió.

Tota aquesta reflexió es facilita molt a partir de la taula de valors de les diferents derivades en un full de càlcul:

Corba d'Agnesi			a= 1	
(abscissa)	(ordenada)	(pendent)	(curvatura)	
x	y	y'	y''	y'''
0,000	1,0000	0,0000	-2,0000	0,0000
0,100	0,9901	-0,1961	-1,8829	2,2833
0,200	0,9615	-0,3698	-1,5646	3,9389
0,300	0,9174	-0,5050	-1,1274	4,6416
0,400	0,8621	-0,5945	-0,6663	4,4537
0,500	0,8000	-0,6400	-0,2560	3,6864
0,577	0,7502	-0,6495	-0,0010	2,9264
0,600	0,7353	-0,6488	0,0636	2,6939
0,700	0,6711	-0,6306	0,2842	1,7383
0,800	0,6098	-0,5949	0,4171	0,9555
0,900	0,5525	-0,5494	0,4823	0,3824
1,000	0,5000	-0,5000	0,5000	0,0000
1,100	0,4525	-0,4504	0,4873	-0,2324
1,200	0,4098	-0,4031	0,4571	-0,3575
1,300	0,3717	-0,3593	0,4182	-0,4111
1,400	0,3378	-0,3196	0,3763	-0,4202
1,500	0,3077	-0,2840	0,3350	-0,4033
1,600	0,2809	-0,2525	0,2961	-0,3730
1,700	0,2571	-0,2247	0,2606	-0,3368
1,800	0,2358	-0,2002	0,2288	-0,2994
1,900	0,2169	-0,1788	0,2007	-0,2635
2,000	0,2000	-0,1600	0,1760	-0,2304
2,100	0,1848	-0,1435	0,1545	-0,2006
2,200	0,1712	-0,1290	0,1358	-0,1743
2,300	0,1590	-0,1163	0,1195	-0,1513
2,400	0,1479	-0,1050	0,1054	-0,1313
2,500	0,1379	-0,0951	0,0932	-0,1140
2,600	0,1289	-0,0864	0,0825	-0,0991
2,700	0,1206	-0,0786	0,0733	-0,0863

Si ara analitzam una mica més els punts singulars veurem que realment ho són, singulars. En el cas del punt d'inflexió, aquest es produeix per a $x=\pm a/\sqrt{3}$. Això significa que el pendent de la semirecta generatriu és $m=\pm\sqrt{3}$, és a dir, que forma un angle de $\pm 60^o$ amb el sentit positiu de l'eix d'abscisses.

En el cas dels màxims relatius de curvatura, si es produeixen per a $x=\pm a$, això significa que l'angle de la semirecta és en aquest cas $\pm 45^o$.

Singularitat i bellesa matemàtica!

Un poc més enllà

Perquè l'homenatge a la matemàtica milanesa sigui complet, hem de treballar l'estudi de les integrals relacionades amb la seva corba. I aquestes despertaran, en els caps oberts, bones preguntes.

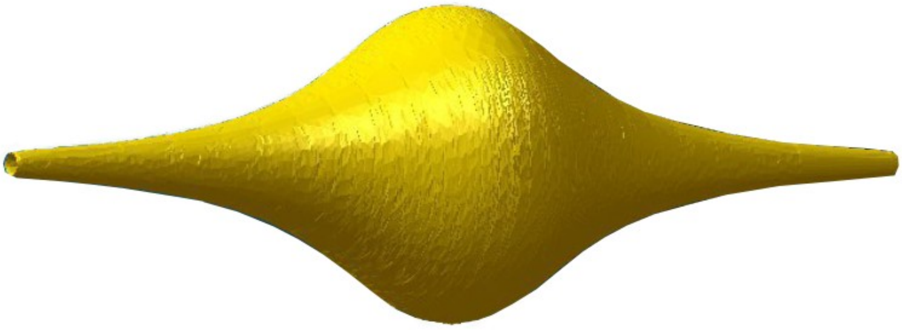
- Activitat 5

Quina és l'àrea que hi ha entre l'eix d'abscisses i la corba d'Agnesi? La integral és quasi immediata, el resultat, sorprenent. L'àrea englobada coincideix amb la superfície de l'esfera que té el mateix radi que la circumferència generatriu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2} dx = [a^{2.} \arctan(\frac{x}{a})]_{-\infty}^{+\infty} = \pi . a^2 = 4. \pi . r^2$$

Una bona manera de recordar aquest fet, és construir la corba d'Agnesi a partir del diàmetre d'una taronja (el més esfèrica possible) i provar de cobrir l'àrea cercada amb la seva pell. És important caure en el fet que l'àrea calculada està sota una funció asimptòtica i que, per tant, tot i que s'allargui infinitament, tot i que el perímetre sigui infinit, l'àrea no ho és pas, infinita.

Activitat 6: el fus d'Agnesi.



Anomenam així la figura de revolució que es produeix quan feim girar la corba d'Agnesi entorn de l'eix d'abscisses. El càlcul del seu volum passa per fer la següent integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi (\frac{a^3}{x^2+a^2})^2 dx = [\frac{\pi . a^3 . \arctan(x/a)}{2} + \frac{\pi . a^4 . x}{2.(x^2+a^2)}]_{-\infty}^{+\infty}$$

Aquesta no és, certament, una integral fàcil de resoldre i caldria donar a l'alumne/a, la fórmula d'una integral tipus, com a mínim d'aquest estil:

$$\int \frac{1}{(\mathtt{a}x^2+\mathtt{b})^{\mathtt{n}}} \mathrm{d}x = \frac{2\mathtt{n}-3}{2\mathtt{b}(\mathtt{n}-1)} \int \frac{1}{(\mathtt{a}x^2+\mathtt{b})^{\mathtt{n}-1}} \mathrm{d}x + \frac{x}{2\mathtt{b}(\mathtt{n}-1)(\mathtt{a}x^2+\mathtt{b})^{\mathtt{n}-1}}$$

El resultat de la integral és $\pi^2 a^3/2$. O sigui, que el volum del fus és 3π vegades el volum de l'esfera de diàmetre *a* (pensem que la màxima amplada del fus, posat vertical, és en realitat 2*a*).

- Activitat 7: l'escudella d'Agnesi

Hem dit, quan hem presentat la corba, que Agnesi escrigué l'expressió analítica d'aquesta bescanviant els eixos, és a dir, col·locant-la en vertical (de manera que estrictament parlant, llavors, no seria una funció). L'expressió és aquesta:

$$y=\sqrt{\frac{a^3}{x}-a^2}$$

Llavors, si tornam a fer girar la corba respecte de l'eix d'abscisses, la figura que apareix s'assembla molt a una escudella de voreres infinites. Una bolla de diàmetre *a* en el seu interior marcaria l'altura màxima perquè algun tipus de líquid no arribàs a vessar.

En aquest cas, la integral de revolució presenta la forma:

$$\int_0^a \pi\left(\sqrt{\frac{a^3}{x}-a^2}\right)^2 dx=[a^2(a\,.\ln|x|-x)]_0^a$$

Que torna ser una integral bona de resoldre. En aquest cas, el resultat és... infinit!

Agnesi-Gauss, un maridatge difícil

Quan un mira la corba d'Agnesi per primer cop, és inevitable la referència visual a la campana de Gauss. Les dues són simètriques, les dues són contínues i presenten una asímptota per a y=0, les dues presenten un màxim absolut, etc. Aquest paral·lelisme ens brinda un exercici molt interessant de comparació analítica. Com poden arribar a ser de semblants les dues funcions?

Sabem que la funció gaussiana depèn de tres paràmetres: un factor de proporcionalitat vertical *a*, una constant de desplaçament horitzontal *b*, i un tercer factor d'«estirament horitzontal» d (expressat habitualment com a $2c^2$).

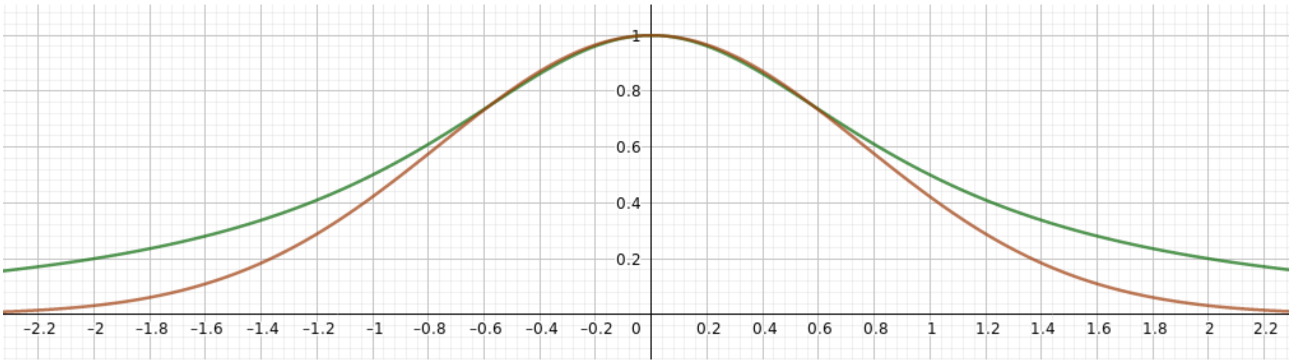
$$y=ae^{\frac{-(x-b)^2}{d}}$$

Per comparar les dues funcions, és lògic imposar que tenguin la mateixa alçada. Llavors l'a de Gauss, serà exactament l'a d'Agnesi. La campana de Gauss la presentarem centrada sobre els eixos de coordenades, per la qual cosa b= 0. Ens queda definir el paràmetre d.

Una primera idea, podria ser la de què els punts d'inflexió de les dues corbes siguin coïncidents. Si l'abscissa d'aquests punts era $x=\pm a/\sqrt{3}$ llavors l'ordenada serà $y=3a/4$. Per tant, haurem d'imposar la condició que

$$ae^{\frac{-x^2}{d}}=3a/4 \qquad \text{que fa que} \qquad d=a^2/3.\ln(3/4)$$

Les corbes que obtenim d'aquesta manera, són:



Facem ara un segon intent de casar-les imposant la condició que, tenint la mateixa alçada, també tenguin la mateix àrea sota la corba. És a dir, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{\frac{-x^2}{d}}=\pi\cdot a^2$$

Aquesta és una integral que escapa a les competències de càlcul de 2n de Batxillerat, però que presenta un resultat molt curiós: $d=\pi\cdot a^2$

Ara, la nova corba de Gauss comparada amb la d'Agnesi ens ofereix aquesta imatge:

No és senzill, doncs, ajustar les dues corbes. Potser el fet que quan el príncep de les matemàtiques nasqué (1777) Maria Gaetana tenia ja 59 anys sigui una barrera generacional difícil de franquejar.

Algunes reflexions i noves preguntes

Sovint els alumnes de batxillerat adquireixen una certa destresa en la derivació i la integració de funcions, sense que això impliqui necessàriament un grau paral·lel de comprensió d'allò que estan fent. La preparació per a la selectivitat i els models d'examen que fins ara s'han proposat (per causes que no entrarem a analitzar) certament no ajuden en aquest camí. També tenc la impressió que la lenta introducció de les calculadores gràfiques (o *tablets*, o ordinadors...) no ve acompanyada d'una exercitació diferent en el sentit esmentat.

La riquesa de conceptes en la relativa senzillesa de l'ona d'Agnesi és una magnífica ocasió per ajudar els alumnes a trobar el sentit geomètric de les operacions analítiques de les que, com ja hem dit, acaben sent uns bons... tècnics.

Construir la corba amb un filferro no és en absolut una activitat folklòrica, sinó que esdevé una activitat plena de sentit sota el paraigües del vell paradigma de la manipulació. Passen pels dits els màxims, els punts d'inflexió, les curvatures...

Recobrir la superfície sota la corba amb la pell d'una taronja, tot i la impossibilitat d'un treball fi en aquest sentit, permet un nexe visual perdurable entre la superfície d'una esfera i l'àrea estudiada.

Construir models reals de les figures estudiades permet, també, el coneixement d'oficis íntimament relacionats com els de gerrer o torner, i de noves possibilitats com les que tenim a l'abast amb una -ja assequible- impressora 3D.

Després de tot aquest treball, l'alumne/a hauria de ser capaç -des de la doble perspectiva de la generació geomètrica i de l'expressió analítica- de respondre a preguntes com:

- Per què la corba presenta un màxim absolut?
- Per què és contínua?
- Per què presenta l'asímptota horitzontal?
- Per què és simètrica respecte de l'eix d'ordenades?
- Quin és el rang de valors que pot prendre el pendent de la recta tangent en un punt?
- Donat un valor per a aquest pendent, se repetirà en algun altre punt?
- On és el valor màxim del pendent?

I per ventura, arribar a formular-se preguntes de més envergadura com:

- Per què els punts d'inflexió i la màxima curvatura relativa presenten angles de la semirecta generatriu tan singulars com 45º i 60º?
- Què passa amb les característiques de la corba (altura, punts singulars, pendents, àrea, volums...) si canviam el valor d'*a*? Quines canvien i quines no?
- Per què el volum del fus, tot i estendre's fins a l'infinit, és finit, mentre que el volum de l'escudella, voltant també a l'entorn d'una asímptota, és infinit?

Josep Lluís Pol i Llompart (setembre de 2018)
Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic *CentMat*

Fonts consultades

- José Manuel Álvarez (2006), «Curvas en la historia 1». Nívola Libros Ediciones, Madrid.

- Maria Gaetana Agnesi. MacTutor History of Mathematics archive. University of Saint Andrew's, Scotland (http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/).

- Maria Gaetana Agnesi, Viquipèdia (interessant comparar diverses llengües)

- Notes de la conferència «Les lectores de Newton» de Pilar Bayer. Universitat de les Illes Balears, Palma, 15 de maig de 2018.