59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió

Problema 4. Trobar totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

Solució. Prenent $x = y = 0$ s'obté $f(0) + f(0) = 0$. Per tant $f(0) = 0$.

Prenent $y = 0$, atès que $f(0) = 0$, s'obté $f(x^3) = xf(x^2)$. Ara, subtituïnt en l'equació de l'enunciat, obtenim

$$xf(x^2) + yf(y^2) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)),$$

i per tant,

$$xf(y^2) + yf(x^2) = (x + y)f(xy).$$

Sigui ara $z \in \mathbb{R}$ arbitrari. Si prenem $x = \sqrt[3]{z}$ i $y = -\sqrt[3]{z}$, com $x + y = 0$, de nou subtituïnt en l'equació de l'enunciat, obtenim

$$f(-z) = -f(z).$$

Ara, si prenem $y = 1$, obtenim $xf(1) + f(x^2) = (1 + x)f(x)$. I si prenem $y = -1$, obtenim $xf(1) - f(x^2) = (1 - x)f(x)$. Sumant ambdues equacions tenim

$$f(x) = xf(1).$$

Diguem c a la constant $f(1)$. És senzill verificar (subtituïnt en l'equació de l'enunciat) que per a tota $c \in \mathbb{R}$, la funció $f(x) = cx$ és solució de l'equació.

Problema 5. $2n$ estudiants (amb $n \geq 5$) participen en un torneig de tennis de taula, que té una durada de 4 dies. Cada dia, cada estudiant, juga un partit. En cada partit hi ha un guanyador i un perdedor (no hi ha empat possible). És possible que la mateixa parella d'estudiants s'enfrontin dues o més vegades, en dies diferents. Sabem que el torneig acaba de la forma següent:

- Hi ha un únic guanyador.
- Hi ha exactament 3 estudiants que acaben en segona posició.
- Cap estudiant ha perdut els 4 partits.

Quants estudiants van guanyar un sol partit y quants van guanyar exactament dos partits?

Solució. Cada dia es disputen exactament n partits. Per tant, al final del torneig, s'han disputat $4n$ partits.

Diguem N_i el conjunt format pels estudiants que han guanyat i partits amb $i \in \{0,1,2,3,4\}$, i sigui $n_i = |N_i|$. Per la tercera condició de l'enunciat, $n_0 = 0$. Per tant, ha de ser

$$4n_4 + 3n_3 + 2n_2 + n_1 = 4n.$$

A més, com $2n$ és el nombre total d'estudiants, es té que

$$n_4 + n_3 + n_2 + n_1 = 2n.$$

Diguem g a l'estudiant guanyador i s_1, s_2, s_3 als tres estudiants que acaben en segona posició. És senzill veure que només pot ser o bé $N_4 = \{g\}$, o bé $N_3 = \{g\}$ (i $N_4 = \emptyset$).

Suposem que $N_4 = \{g\}$ (o dit altrament $n_4 = 1$). Vegem que no pot ser

- $N_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ (i per tant $n_3 = n_2 = 0$ i $n_1 = 3$). En tal cas, $1+3 = 2n$, però $n \geq 5$.
- $N_2 = \{s_1, s_2, s_3\}$ (i per tant $n_3 = 0$, $n_2 = 3$ i $n_1 = 2n - 4$). En tal cas, $4 + 2 \cdot 3 + (2n-4) = 4n$ i, per tant, $n = 3$ (però $n \geq 5$).

De forma similar es pot veure que no pot ser $N_3 = \{g\}$; és a dir, no pot ser $n_4 = 0$ i $n_3 = 1$.

Per tant, ha de ser $N_4 = \{g\}$ ($n_4 = 1$), i $N_3 = \{s_1, s_2, s_3\}$ ($n_3 = 3$). Amb tal condicions, $n_1 = 2n - n_2 - 4$ i es té

$$4 + 3 \cdot 3 + 2n_2 + (2n - n_2 - 4) = 4n,$$

d'on s'obté $n_2 = 2n - 9$. En conclusió, $2n - 9$ estudiants van guanyar exactament 2 partits i $n_1 = 2n - (2n-9) - 4 = 5$ estudiants van guanyar exactament 1 partit.

Problema 6. Siguin m i n enters positius. Siguin $a_1, \ldots, a_m$ enters positius diferents dins el conjunt $\{1, \ldots, n\}$ tals que per a qualssevol parell d'índexos i, j amb $1 \leq i \leq j \leq m$ i $a_i + a_j \leq n$, existeix un índex k tal que $a_i + a_j = a_k$. Provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Solució. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$.

Provem que per a tot j amb $1 \leq j \leq m$ es té $a_j + a_{m-j+1} \geq n + 1$.

Per reducció a l'absurd. Sigui j amb $1 \leq j \leq m$ tal que $a_j + a_{m-j+1} \leq n$. Llavors per a cada i amb $1 \leq i \leq j$, com $a_i < a_j$, es té $a_i + a_{m-j+1} \leq n$. Per l'enunciat, per cada i, tindrem a_{k_i} tal que $a_i + a_{m-j+1} = a_{k_i}$. Com $a_i > 0$, tenim $m - j + 1 < k_i \leq m$. Notem que, per tant, cada k_i pot prendre $m-(m-j+1) = j-1$ valors diferents. Però, tots els a_{k_i}'s, i per consequent tots els k_i's, són diferents, per ser-ho els a_i's. Com tenim exactament j d'aquests valors (recordem que $1 \leq i \leq j$) arribem a un absurd.

Ara doncs, sumant aquestes desigualtats per a tot j es té

$$\sum_{j=1}^{m} (a_j + a_{m-j+1}) \geq m \cdot (n+1).$$

Però notem que

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j + a_{m-j+1}) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$$

Per tant,

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \geq m \cdot (n+1)$$

com volíem veure.