59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Primera Sessió

Problema 1. Les arrels de l'equació $x^2+ax+b=0$ són x_1, x_2 i les de l'equació $bx^2+bcx+1=0$ són x_1, $\frac{1}{x_2}$, on a, b, c són nombres reals, i $b>0$. Demostrar que $ac\geq 4$.

Solució. Aplicant la fórmula del producte de les arrels d'una equació de segon grau a cada una de les equacions donades a l'enunciat, s'obté el sistema d'equacions en les incògnites x_1, x_2 següent

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= b \\ \tfrac{x_1}{x_2} &= \tfrac{1}{b}, \end{aligned}$$

les solucions del qual són

$$(x_1,x_2)=(1,b)\,,(-1,-b)\,.$$

Al seu torn, per la fórmula de la suma de les arrels d'una equació de segon grau, aplicada a cada una de les de l'enunciat, tindrem

$$1+b=-a \qquad \text{i} \qquad 1+\frac{1}{b}=-c$$

o bé

$$-1-b=-a \qquad \text{i} \qquad -1-\frac{1}{b}=-c,$$

que podem escriure d'una manera més compacta com

$$a=\pm(1+b) \qquad \text{i} \qquad c=\pm\left(1+\frac{1}{b}\right),$$

on els signes es corresponen, i d'on deduïm

$$ac=(1+b)\left(1+\frac{1}{b}\right)=b+\frac{1}{b}+2\geq 4,$$

com es volia, atès que, essent $b>0$, es compleix que $b+\frac{1}{b}=\left(\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+2\geq 2$ i, a més, la igualtat es compleix només quan $\sqrt{b}-\frac{1}{\sqrt{b}}=0$, és a dir, només quan $b=1$.

Problema 2. En una presó hi ha 30 convictes. Se'ls dóna una última possibilitat abans de matar-los: s'hauran de col·locar en fila índia i se'ls col·locarà a cadascú un barret, blanc o negre. Tothom veu de quin color tenen el barret tots els presoners de davant seu (així, l'últim veu el barret dels 29 que té al davant i el primer no veu res). Es preguntarà a cada pres de quin color és el seu barret (començant per l'últim pres, el que ho veu tot). El pres que encerti de quin color és el seu barret es salva, el que no, serà afusellat.

Abans de que això es realitzi, els presos, que coneixen la prova a la qual seran sotmesos però, no el color del barret que se'ls posarà, poden parlar i pensar una estratègia de grup. Quina estratègia poden seguir els 30 presoners per tal de salvar-se'n el màxim nombre possible?

Solució. Assignem el nombre 0 al color blanc i l'1 al negre. Notem que cada presoner té la informació que li han transmès els que han parlat abans que ell, i a més la informació dels colors dels barrets que veu. Una de les possibles estratègies que permetrà salvar almenys a 29 dels 30 presoners és la que es descriu a continuació.

El primer a parlar (el presoner 30) diu el color corresponent a la suma (dins $\mathbb{Z}_2$, és a dir $1+1=0$) dels colors dels 29 presoners de davant. Ara, el presoner 29 pot sumar els colors dels barrets de davant seu i, restant-ho (que en aquest cas és el mateix que sumar-ho) del que havia dit el presoner 30, pot deduïr quin és el seu color, dir-lo i salvar-se. El presoner 28 ha sentit quant sumen els dels 29 primers presoners i, el color del presoner 29, i per tant pot deduirne la suma dels 28 primers. A partir d'això, sumant els colors dels barrets dels 27 presoners que veu, pot conèixer quin és el seu color, i salvar-se. Així, successivament, es salven tots els presoners des del 29 fins l'1. L´únic que ha de fer el presoner i-èssim ($1 \leq i \leq 29$) és restar, del que ha dit el presoner 30 (la suma dels 29 primers), el que ha dit cada un dels altres presoners que ja han parlat (el seu respectiu color), i també la suma dels colors dels barrets que ell veu davant seu. El que s'obtengui és el color del seu barret.

Clarament, aquesta estratègia és la millor possible. Naturalment, no hi ha cap forma de garantir que el presoner 30 es salvi, ja que no pot deduir cap informació sobre el color del seu barret.

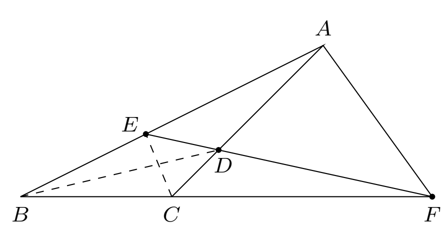
Problema 3. Les línies que bisequen els angles B i C del triangle ABC tallen amb els costats oposats en els punts D i E, respectivament. Si la línia DE talla amb la línia BC en el punt F, demostrar que AF és la bisectriu exterior de l'angle A.

Solució A. Apliquem el teorema de Menelau a $\triangle ABC$ i transversal FDE. Tindrem:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1.$$

Com que $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}$ i $\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{AB}$ (pel teorema de la bisectriu interior), resulta

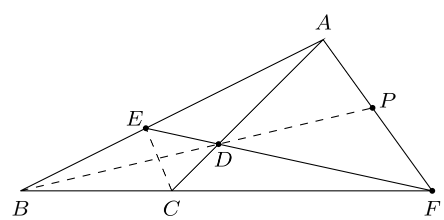
$$\frac{CA}{BC} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$



És a dir:
$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA}.$$
Així, doncs, el punt F, que divideix el costat BC de $\triangle ABC$ en dos segments substractius proporcionals als altres costats del triangle, fa AF bisectriu exterior de l'angle A, pel recíproc del teorema de la bisectriu d'un angle exterior d'un triangle.

<u>Solució B</u>.

Sigui $\{P\} = BD \cap AF$ i apliquem el teorema de Ceva al triangle ABF. Tindrem:
$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{FP}{PA} = 1.$$
Atès que CE és bisectriu en $\triangle ABC$,
$$\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{BC}.$$
I atès que BP és bisectriu en $\triangle ABF$, serà
$$\frac{FP}{PA} = \frac{BF}{AB}.$$



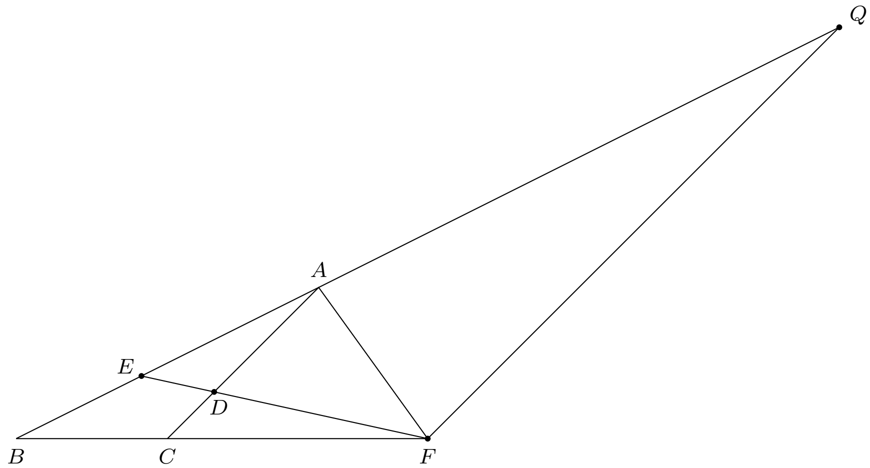
Per tant,
$$\frac{CA}{BC} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{BF}{AB} = 1.$$
És a dir:
$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA},$$
i acabam el raonament com a la solució anterior.

<u>Solució C</u>.

(Per els que no estan familiaritzats amb el teorema de la bisectriu d'un angle exterior d'un triangle)

Partim de la relació
$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{CA}, \tag{1}$$

obtinguda a les solucions anteriors.



Sigui Q el punt de la línia AB tal que FQ és paral·lel al costat CA de $\triangle ABC$. En virtut del teorema de Thales,

$$\frac{AQ}{CF} = \frac{AB}{BC}.$$

A més, de la semblanca dels triangles ABC i QBF, se'n dedueix que

$$\frac{FQ}{BF} = \frac{CA}{BC}.$$

Dividint membre a membre aquestes expressions s'obté:

$$\frac{AQ}{FQ} = \frac{AB \cdot CF}{CA \cdot BF} = \frac{\frac{AB}{CA}}{\frac{BF}{CF}} = (\text{per } (1)) = 1$$

i

$$AQ = FQ.$$

Això implica que el triangle QAF és isòsceles amb

$$\begin{aligned} \angle QAF &= \angle AFQ \\ &= \angle CAF \qquad \text{(per alterns interns)} \end{aligned}$$

Podem, doncs, concloure que AF és la bisectriu de l'angle exterior en A, tal com volíem demostrar.