Título: SISTEMAS DE NUMERACIÓN POSICIONALES Y CALCULADORA FX-82 ES PLUS

Nivel educativo: Primer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria. Asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética”. Bloque de contenidos “Números naturales y sistemas de numeración”.

Calculadora: CASIO FX-82 ES PLUS.

Autora: Dolores Rodríguez Vivero.

Proyecto: Sí.

Experimentado: Sí.

Material necesario para experimentar: Maleta con 15 calculadoras FX-82 ES PLUS.

Justificación: El Decreto de currículo de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia, Xunta de Galicia (2014), establece que uno de los objetivos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consiste en que los alumnos de esta etapa alcancen una alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervienen los números y sus relaciones. La idea de número y la forma de representar los números que se utilizan en la vida cotidiana suponen una gran complejidad conceptual, a pesar de que pueda no parecérnoslo por tener asimiladas las destrezas asociadas. El estudio de los sistemas de numeración posicionales en una base arbitraria permite una mejor comprensión e interiorización de los conceptos relacionados con el sistema de numeración posicional decimal tales como el valor de posición o la expresión polinómica de un número, por ello creemos que es necesario formar a los futuros maestros y maestras en esta temática.

Se acompaña la enseñanza de los sistemas de numeración posicionales con el uso adecuado de la calculadora que permite al alumnado dejar a un lado cálculos y centrarse en la búsqueda de patrones y regularidades propias de los sistemas de numeración posicionales.

Duración: Dos sesiones de hora y media cada una.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN POSICIONALES Y CALCULADORA FX-82 ES PLUS

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia que nos ocupa consiste es un estudio de los sistemas de numeración posicionales en una base arbitraria utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en adelante TAD, siguiendo el modelo establecido por Antonio Estepa en Ruiz Higueras y otros (2007 pp. 339-357) al cual incorporamos el uso de la calculadora CASIO FX-82 ES PLUS con el fin de que los alumnos se centren en el proceso de razonamiento y no en cálculos rutinarios que se realizan con la máquina.

Para llevar a cabo el trabajo, inicialmente se plantea una *situación fundamental*, situación adidáctica próxima al alumno, con la que se pretende que los estudiantes vivencien la necesidad de conocer los sistemas de numeración posicionales de base arbitraria. Mediante la resolución de esta tarea, el alumnado, con la ayuda de la calculadora y guiado por el docente, será capaz de deducir por sí mismo las propiedades de esta teoría. De esta forma, se produce un paso de forma natural a la tercera parte del trabajo, la *institucionalización*, es decir, la formalización de los conceptos clave de esta teoría, como son las reglas de funcionamiento, el valor de posición de los números y la expresión polinómica de un número en una base arbitraria.

Se termina el trabajo con una reflexión en la que se recoge la potencialidad de la calculadora en la elaboración de esta práctica.

2. SITUACIÓN FUNDAMENTAL

Para la comprensión de los sistemas de numeración posicionales de base arbitraria siguiendo la TAD, se parte de la situación fundamental que a continuación exponemos, que está expresada a través de la siguiente actividad generatriz de la organización didáctica que dota de sentido al estudio en cuestión.

LAS PESADAS.

Un desempleado lee en el periódico el siguiente anuncio "SE NECESITAN dos personas para pesar y anotar los pesos realizados, más información en...".

Se presenta en el lugar indicado para informarse sobre el trabajo y le dicen:

Nuestra empresa se dedica a pesar objetos diversos de diferentes tamaños y pesos. Trabajamos para dos empresas:

• La empresa A, quiere que los pesos se realicen con el siguiente sistema de pesas, S4: 1kg, 4kg, 16kg, 64kg,… (se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor).
• La empresa B quiere que los pesos se realicen con siguiente sistema de pesas, S5: 1kg, 5kg, 25kg, 125kg,… (se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor).

Para las pesadas se utilizan balanzas de Roberval, en un platillo se pone el objeto a pesar y en el otro platillo las pesas.

El trabajo del equipo de dos personas consiste en lo siguiente: Un miembro del equipo debe realizar la pesada de un objeto, de la forma más eficaz posible, con uno de los dos sistemas y dictar el resultado del peso al otro miembro del equipo, que debe anotar en una hoja de papel del modo más breve posible. Se entiende por resultado de la pesada la expresión del número de pesas de cada tipo que se han utilizado.

Este resultado debe ser óptimo, es decir, debe utilizar el menor número de pesas posible, ya que, cuantas menos pesas utilicemos, más rápidas se harán las pesadas y se pesarán más objetos en un mismo tiempo (las empresas buscan la eficacia). Por ejemplo, si queremos pesar un objeto de 103kg con el sistema S4, podemos utilizar 103 pesas de 1kg. Obviamente, se tardaría mucho tiempo en poner y quitar las pesas en el platillo. También podríamos utilizar 25 pesas de 4kg y 3 de un 1kg, en total 28 pesas, todavía son muchas pesas. El resultado óptimo sería la pesa de 64kg, dos de 16kg, una de 4kg y tres de 1kg, en total 7 pesas.

Dentro de unos días realizaremos un examen a los miembros de los equipos que se presenten para obtener el trabajo. Le adjudicaremos el puesto de trabajo al equipo que haga y anote la pesada de la mejor manera posible, es decir, el que utilice menor número de pesas en las pesadas y el que invente el modo más breve de anotar los pesos obtenidos en cada pesada cuando se los dice su compañero. Así el trabajo irá más rápido, pues "el tiempo es oro".

Consigna: *¿Qué deben hacer dos miembros de un equipo para obtener el trabajo? Es decir, ¿Cómo se realizarán las pesadas con el menor número posible de pesas, en cada sistema? Y, ¿Cómo se puede anotar en cada sistema de pesas, el resultado de la pesada de la manera más breve posible?*

Para comenzar, podéis intentar el resultado en S4 de las pesadas de objetos de 46kg, 87kg, 106kg, 158kg, 383kg…

A continuación puedes expresar los resultados de las pesadas de los objetos anteriores utilizando S5.

3. RESOLUCIÓN DE LA TAREA

Los alumnos inicialmente resolvieron la tarea de obtener la pesada óptima, es decir, utilizar el menor número de pesas, para cada uno de los objetos, utilizando la calculadora y siguiendo una estrategia sumativa o una estrategia sumativa-multiplicativa, consistente en ir restando al peso del objeto las distintas pesas posibles, comenzando con la de mayor valor menor al peso en cuestión hasta la de menor valor. La diferencia entre ambas técnicas consiste en que en la sumativa restan solamente el peso de una pesa en cada paso mientras que en la sumativa-multiplicativa, restan, si es posible, un múltiplo del peso de alguna de las pesas.

Para realizar las pesadas en el sistema S4, el procedimiento seguido inicialmente fue el siguiente:

Para el objeto de 46Kg, dado que 46Kg es menor que 64kg pero mayor que 16kg, comienzan a restar con la pesa de 16kg, posteriormente con la de 4kg y finalmente con la de 1kg,

$46-16=30;\ 30-16=14;\ 14-4=10;\ 10-4=6; 6-4=2;\ 2-1=1;\ \ 1-1=0$,

o también realizando una técnica sumativa-multiplicativa,

$$46-16\cdot 2=14;\ 14-4\cdot 3=2;\ 2-1\cdot 2=0,$$

concluyendo en ambos casos que se necesitan 2 pesas de 16kg, 3 de 4kg y 2 de 1kg.

Una vez realizada la primera pesada de manera óptima y tras la advertencia en la cuestión generatriz de que se pueden continuar añadiendo pesas de mayor valor, los alumnos reflexionan sobre la regularidad de los pesos en el sistema S4 y observan que éstos son las sucesivas potencias de cuatro, lo cual les permite afrontar con seguridad las pesadas de valores mayores que 64kg.

De este modo, llegan a deducir, siguiendo con las técnicas sumativa o sumativa-multiplicativa y con la ayuda de la calculadora, que la pesada óptima para el objeto de 87kg es 1 pesa de 64kg, 1 de 16kg, 1 de 4kg y 3 de 1kg.

Guiando al alumnado hacia una reflexión sobre la efectividad de las técnicas sumativa y sumativa-multiplicativa para pesos mayores, los alumnos llegan a deducir de un modo muy sencillo y natural una técnica multiplicativa consistente en la búsqueda de la mayor potencia de 4 menor que el peso, dividir el peso entre dicha potencia, tomar el cociente y volver a realizar el proceso de división con el resto obtenido, buscando la mayor potencia de cuatro menor que dicho resto, volver a tomar el cociente y repetir la técnica con el nuevo resto. Este proceso terminará cuando se obtenga resto cero.

El uso de la calculadora facilita la obtención de las diferentes potencias de la base de un modo rápido, así como el cálculo de los diferentes cocientes y restos utilizando el método de los números mixtos explicado en Martín A. (2014).

En el caso de la pesada del objeto de 106kg, el procedimiento usado con la calculadora CASIO FX-82 ES PLUS para la obtención de la pesada óptima es el siguiente:

1. Dado que $4^3 = 64 < 106 < 256 = 4^4$, se deben realizar la división $106 \div 64$ y obtener cociente y resto. Para ello, se convierte la fracción $\frac{106}{64}$ en número mixto, obteniéndose $1\ \frac{21}{32}$, de donde se deduce que el cociente es 1 y el resto, al tener el número mixto denominador 32 y no $64 = 32 \cdot 2$, será $42 = 21 \cdot 2$.
2. Como $4^2 = 16 < 42 < 64 = 4^3$, se debe realizar la división $42 \div 16$ y obtener cociente y resto. Puesto que $\frac{42}{16} = 2\ \frac{5}{8} = 2\ \frac{10}{16}$, el cociente es 2 y el resto es 10.
3. Al ser $4^1 = 4 < 10 < 16 = 4^2$, se debe realizar la división $10 \div 4$ y obtener cociente y resto. De la igualdad $\frac{10}{4} = 2\ \frac{1}{2} = 2\ \frac{2}{4}$, se deduce que el cociente es 2 y el resto es 2.
4. Finalmente, ya que $4^0 = 1 < 2 < 4 = 4^1$ y la división $2 \div 1$ tiene cociente 2 y resto 0, se concluye el proceso.

De este modo, resulta que para el objeto de 106kg son necesarias 1 pesa de 64kg, 2 de 16kg, 2 de 4kg y 2 pesas de 1kg.

Análogamente, utilizando la técnica multiplicativa se obtienen los siguientes resultados:

Para el objeto de 158kg, la pesada óptima consiste en 2 pesas de 64kg, 1 pesa de 16kg, 3 pesas de 4kg y 2 pesas de 1kg.

Finalmente, para el objeto de 383kg, se llega a la conclusión de necesitar 1 pesa de 256kg, 1 pesa de 64kg, 3 pesas de 16kg, 3 pesas de 4kg y 3 pesas de 1kg.

De la misma forma, llegan a la conclusión de que los pesos del sistema S5 son las potencias de base cinco y siguiendo la técnica descrita anteriormente, se llega a las siguientes pesadas óptimas:

Para el objeto de 46kg: 1 pesa de 25kg, 4 pesas de 5kg y 1 pesa de 1kg.

Para el objeto de 87kg: 3 pesas de 25kg, 2 pesas de 5kg y 2 pesas de 1kg.

Para el objeto de 106kg: 4 pesas de 25kg, 1 pesa de 5kg y 1 pesa de 1kg.

Para el objeto de 158kg: 1 pesa de 125kg, 1 pesa de 25kg, 1 pesa de 5kg y 3 pesas de 1kg.

Para el objeto de 383kg: 3 pesas de 125kg, 1 pesa de 5kg y 3 pesas de 1kg.

Una vez realizadas las pesadas, se introduce la cuestión de la escritura de la forma más breve posible. La mayoría de los alumnos reproduce la escritura en una tabla de doble entrada, por ejemplo, para el objeto de 46kg en el sistema S4, se recoge la información de la forma:

Número de pesas	**Valor**
2	16kg
3	4kg
2	1kg

Se recomienda intercambiar filas y columnas y, tras una breve reflexión, se concluye que la mejor forma sería escribirlo en forma de tabla en la que cada columna indique el valor de las pesas y el número de ellas utilizadas; ante la posibilidad de tener que añadir más pesos, se recomienda que éstos se ordenen de menor a mayor comenzando por la derecha, siguiendo analogía de la escritura de los números, que es el objetivo final a alcanzar. Así, la tabla anterior se convierte en la siguiente:

Valor	16Kg	4Kg	1Kg
Número de pesas	2	3	2

Puesto que en cada columna se indica el valor de la pesa utilizada, se considera que es redundante la información de la primera columna de la tabla anterior y se convierte en la siguiente:

16Kg	4Kg	1Kg
2	3	2

De este modo, se llega a obtener la siguiente tabla que resume la información de las pesadas de todos los objetos en el sistema S4:

	256kg	**64kg**	**16kg**	**4kg**	**1kg**
46			2	3	2
87		1	1	1	3
106		1	2	2	2
158		2	1	3	2
383	1	1	3	3	3

La tabla anterior induce a una escritura más simple de los números y sus pesos, como se reproduce a continuación:

Peso del objeto	**Expresión abreviada**
46	232
87	1113
106	1222
158	2132
383	11333

Y para el sistema S5:

	125kg	25kg	5kg	1kg
46		1	4	1
87		3	2	2
106		4	1	1
158	1	1	1	3
383	3		1	3

Inicialmente, para el número 383, la celda correspondiente al peso 25kg aparece vacía, pero, tras un breve análisis de la situación, aparece el uso del cero de forma natural, al igual que ha ocurrido en la historia de los números, para indicar ausencia de orden de unidades, con lo que la tabla anterior se convierte en la siguiente:

	125kg	**25kg**	**5kg**	**1kg**
46		1	4	1
87		3	2	2
106		4	1	1
158	1	1	1	3
383	3	0	1	3

Y la escritura en forma abreviada se recoge en la siguiente tabla:

Peso del objeto	Expresión abreviada
46	141
87	322
106	411
158	1113
383	3013

Para una mejor comprensión de la utilización del cero se introducen dos nuevas pesadas, un objeto de 198kg en el sistema S4, con expresión abreviada 3012 y un objeto de 178kg en el sistema S5, con expresión abreviada 1203.

4. INSTITUCIONALIZACIÓN

Una vez realizada la tarea relacionada con la situación fundamental, se aprovecha ésta para pasar a la institucionalización de los sistemas de numeración posicionales en una base *b* arbitraria.

Se realiza una reflexión, basándose en el ejemplo de las pesadas, llegando a la conclusión de que se podrían haber agrupado en función de cualquier otro valor, el número en el que se agrupan, se denomina *base del sistema*; para la escritura de los distintos números en cada uno de los sistemas se utiliza la notación de indicar la base como subíndice a la derecha del número.

En el ejemplo de las pesadas, en el sistema S4, la base es 4 mientras que en S5 la base es 5 y la escritura es denotada como, por ejemplo, para el número 46, en S4 como $46=232_{(4}$ y en S5 como $46=141_{(5}$.

La forma en que se ha obtenido la expresión abreviada de cada uno de los pesos en los sistemas S4 y S5, permite obtener de un modo muy simple la expresión polinómica de los distintos números en cada una de las bases, por ejemplo, siguiendo con el número 46, las expresiones anteriores, se corresponden con las siguientes descomposiciones:

$$232_{(4} = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 32 + 12 + 2 = 46$$

y

$$141_{(5} = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 25 + 20 + 1 = 46.$$

De los cálculos realizados hasta el momento, se deduce que en la expresión de un número en el sistema S4 solamente aparecen los dígitos 0, 1, 2 y 3 mientras que en S5 pueden utilizarse los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4.

La situación fundamental da lugar de modo natural a la institucionalización de las reglas de los sistemas de numeración posicionales y al teorema fundamental que se enuncian a continuación, tomados de Cid y otros (2003).

Las reglas de los sistemas de numeración posicionales ordenados se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Elegido un número $1 < b \leq 10$ como base del sistema de numeración, se utilizan b símbolos, llamados cifras o guarismos (0, 1, 2,…, b-1) que representan el cero y los primeros números naturales.
2. Cada b unidades simples (o de 1er orden) forman una unidad de 2º orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 1er orden. (*Principio del valor relativo de las cifras*).
3. Se continúa el proceso como en 2).
4. Cuando no hay unidades de un orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.
5. La base b se representa por $10_{(b}$ (es la unidad de 2º orden); la unidad de tercer orden, b^2 se expresará como $100_{(b}$.

Teorema fundamental: Existencia y unicidad de la expresión de un número n en base cualquiera b.
Dado un número natural b (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

$$n = c_k\, b^k + r_k\, b^{k-1} + r_{k-1}\, b^{k-2} + \cdots + r_3\, b^2 + r_2\, b + r_1,$$

donde $r_1, r_2, \cdots, r_k, c_k$, son números naturales menores que b.

El siguiente asunto a tratar es el análisis sobre la posibilidad o no de expresar un número en un sistema de numeración posicional cuya base sea mayor que 10. Para ello se recurre a la cuestión generatriz en el sistema S12, y se reflexiona sobre la necesidad de buscar símbolos para representar los posibles cocientes 10 y 11, ya que de incluir éstos en la expresión del número, cambiaría su valor de posición, por lo tanto, se eligen las letras mayúsculas del abecedario A y B respectivamente. Si la base fuese mayor, se añadirían las siguientes letras del abecedario hasta donde fuese necesario.

Por ejemplo, siguiendo la técnica multiplicativa explicada anteriormente, se puede comprobar que las pesadas óptimas en el sistema S12 de los pesos 20, 23 y 34, o lo que es lo mismo, las expresiones en base 12 de los números en base 10, 20, 23 y 34 son las siguientes:

$$20 = 18_{(12}; 23 = 1B_{(12}; 34 = 2A_{(12}$$

5. REFLEXIÓN

Cabe destacar la diferencia entre la técnica empleada para calcular la expresión de un número escrito en base 10, en otra base arbitraria *b* descrita anteriormente en este trabajo contando con la ayuda de la calculadora y la utilizada por Antonio Estepa en Ruiz Higueras y otros (2007 pp. 348-349). Esta última consiste en dividir el número entre la base, después el cociente entre la base y, así sucesivamente, hasta obtener un cociente inferior a la base; entonces, este cociente y los restos obtenidos forman la expresión del número en dicha base.

A nuestro juicio, la técnica empleada por este autor es menos natural que la explicada en este trabajo y, de hecho, su justificación de no emplear una técnica similar a la nuestra es debido a que "con números grandes, es muy costosa, ya que primero habría que determinar la pesa de mayor valor inmediatamente inferior al peso dado, después la siguiente en orden decreciente, etc"; desde nuestro punto de vista, la ayuda de la calculadora facilita los costosos cálculos a los que se refiere, dejando paso a una técnica de mayor facilidad de comprensión.

6. BIBLIOGRAFÍA

- CID, E., GODINO, J. y BATANERO C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Recuperable en: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

- MARTÍN, A. (2014). Las fracciones, las bondades del número mixto y la calculadora. Jornadas "Las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". FESPM.

- RUIZ HIGUERAS, L.; ESTEPA, A. y GARCÍA, F. J. (2007) Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Publicaciones de la Universidad de Jaén.

- XUNTA DE GALICIA (2014). Decreto 105/2014, do 4 de setembro, polo que se establece o currículo da educación primaria na Comunidade Autónoma de Galicia. Diario Oficial de Galicia, 9 de setembro de 2014, núm. 171.