1 Triangles

En aquest tema estudiarem bàsicament els triangles, relacions entre ells i punts distingits.

1.1 Propietats bàsiques

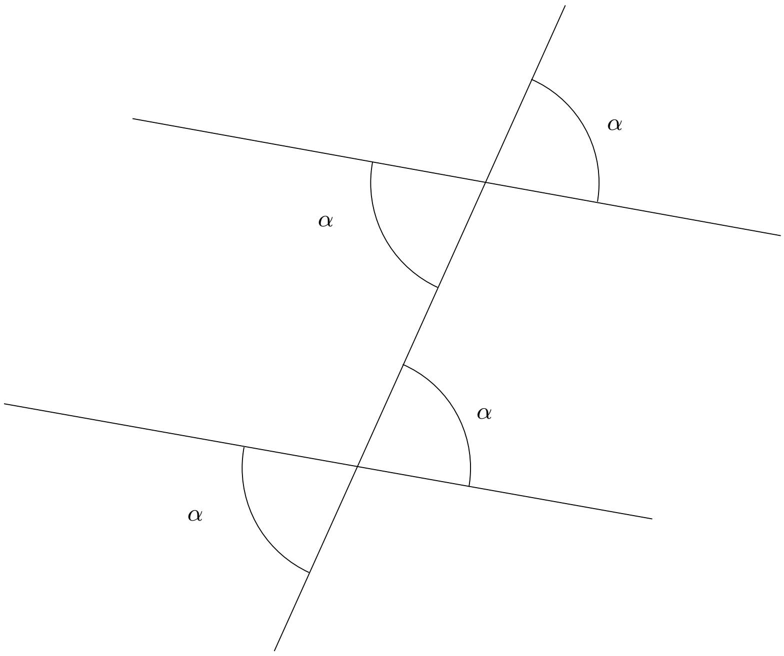
Criteris d'igualtat. Els següents criteris ens asseguren que dos triangles són congruents.

CCC Costat-Costat-Costat: Si dos triangles tenen iguals els tres costats, aleshores són iguals.

CAC Costat-Angle-Costat: Si dos triangles tenen iguals dos costats i l'angle que determinen, aleshores són iguals.

ACA Angle-Costat-Angle: Si dos triangles tenen iguals un costat i els angles adjacents, aleshores són iguals.

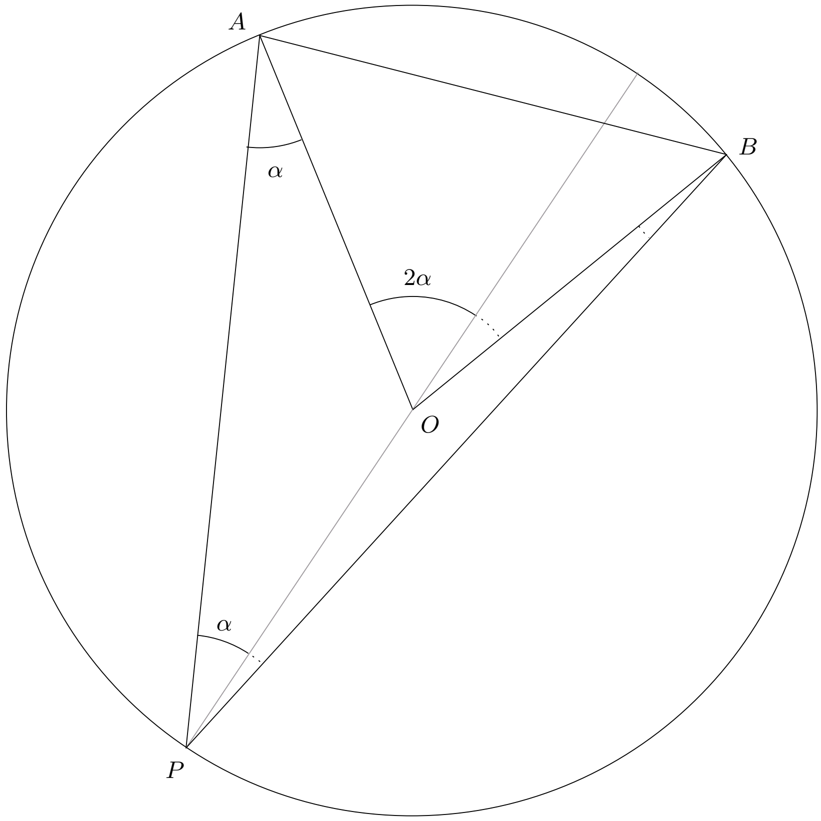
Angles d'un triangle. Recordem les igualtats entre angles que es resumeixen en el diagrama següent.



Igualtat d'angles

Exercici 1.1: Demostra, a partir d'aquestes igualtats, que els angles d'un triangle sumen dos rectes (o un angle pla, o 180º, o π radians).

Arc capaç i conseqüències. L'angle sota el qual es veu una corda des d'un punt de la circumferència és igual a la meitat de l'angle sota el qual es veu des del centre.
Exercici 1.2: Proveu aquest resultat. Indicació:



En particular, l'angle sota el qual es veu la corda des d'un punt de l'arc no depèn del punt de l'arc escollit.

Exercici 1.3: La figura anterior correspon al cas que els extrems de la corda es troben cadascun en una de les dues semicircumferències en què divideix la circumferència el diàmetre que passa pel punt P. Proveu que en l'altre cas se segueix complint la propietat.

Sigui α un angle i AB un segment. Els resultats anteriors diuen que el lloc geomètric dels punts des dels quals es veu el segment AB sota un angle α és un arc de circumferència (de fet, dos arcs de circumferència) que passa per A i B. És l'*arc capaç*.

Exercici 1.4: Donats α i AB, troba el centre de l'arc capaç.

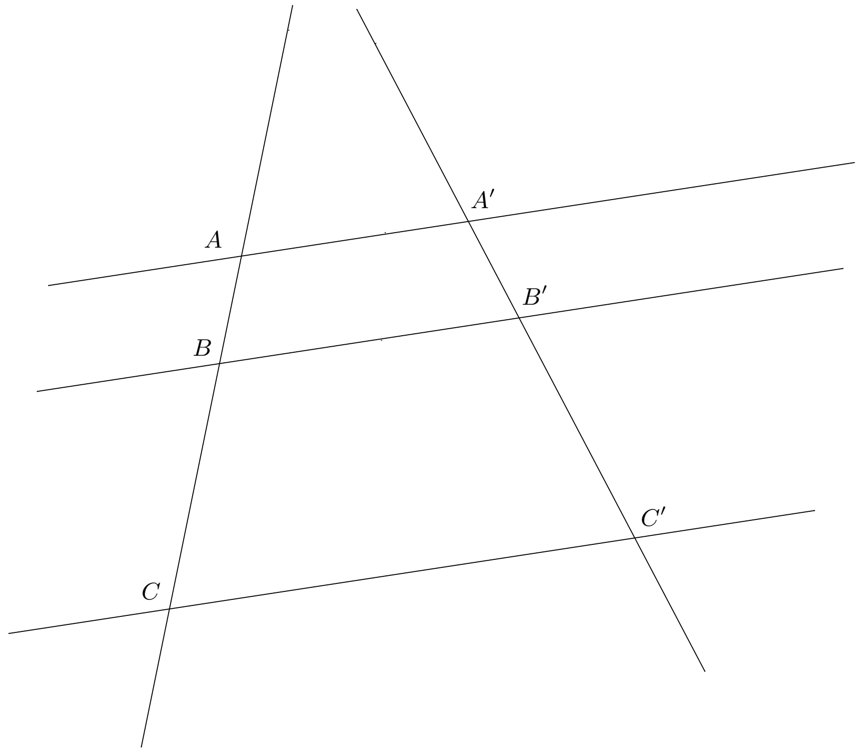
Àrea i relacions. Farem servir la notació (ABC) per indicar l'àrea del triangle $\triangle ABC$; anàlogament, $(ABCD)$ indicarà l'àrea del quadrilàter $\square ABCD$.

La fórmula que dóna l'àrea d'un triangle en funció de la base i l'alçada:

$$(ABC) = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Semblança de triangles. Dos triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ es diuen semblants si es pot transformar l'un en l'altre fent servir translacions, rotacions, reflexions i dilatacions. Això és equivalent a dir que tenen els seus angles iguals, o també que la raó entre costats és igual.

L'equivalència d'aquestes dues darreres condicions és equivalent al teorema de Thales: Quan tres o més paral·leles són travessades per dos transversals, els segments que s'obtenen en una d'aquestes són proporcionals als respectius segments de l'altra.

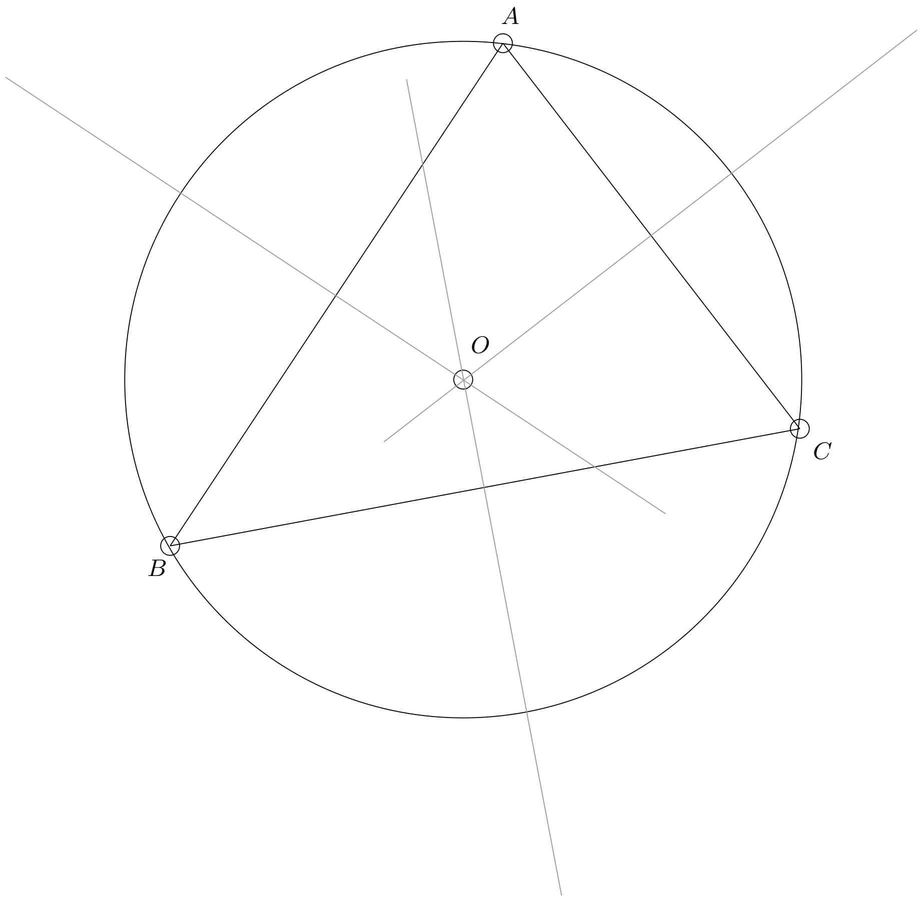


$$\frac{(AB)}{(BC)} = \frac{(A'B')}{(B'C')}$$

1.2 Punts distingits d'un triangle

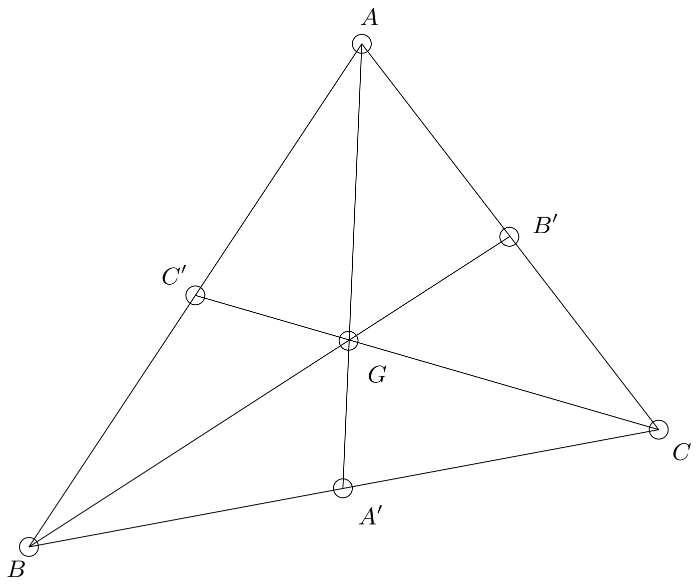
Circumcentre. La *mediatriu* d'un segment és la perpendicular traçada des d'el seu punt mitjà; dit d'altra manera, és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels extrems.

Les mediatrius dels tres costats AB, BC i CA d'un triangle són concurrents. Si O és el seu punt d'intersecció, la circumferència amb centre O que passa per A també passa per B i C i, per tant, circumscriu el triangle. Així, O és el *circumcentre* de $\triangle ABC$, és a dir, el centre de la seva *circumferència circumscrita*.



Exercici 1.5: Proveu que el circumcentre d'un triangle obtusangle es troba fora del triangle.

Centroide. El segment que uneix un vèrtex d'un triangle amb el punt mitjà del costat oposat s'anomena *mediana*. Les tres medianes són concurrents i el seu punt d'intersecció s'anomena el *centroide* del triangle. Té una interpretació física: si construïm el triangle amb un material homogeni, el centroide correspon al centre de gravetat de la figura.



Les medianes divideixen el triangle en sis triangles petits, tots ells d'igual àrea.

Una altra propietat interessant és que qualsevol mediana divideix les altres dues en raó 2 : 1; és a dir:

Teorema 1.1: *El centroide triseca les medianes:*

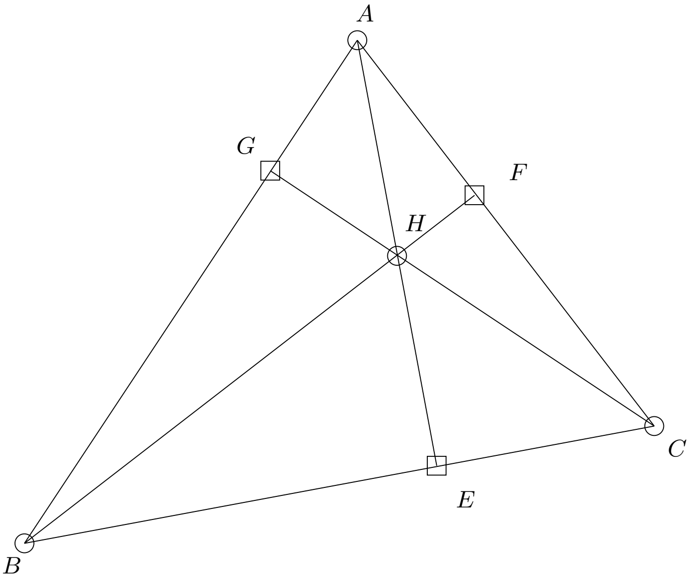
$$(AG) = 2(GA'), \qquad (BG) = 2(GB'), \qquad (CG) = 2(GC').$$

Exercici 1.6: Proveu aquest resultat comparant àrees de triangles.

Exercici 1.7: Proveu que un triangle que té dues medianes iguals és isòsceles.

Ortocentre. Un altre punt distingit sorgeix en considerar les rectes que passant per un vèrtex són perpendiculars al costat oposat (o a su prolongació), és a dir, les *altures.*

Les altures d'un triangle són concurrents en un punt que s'anomena l'*ortocentre* del triangle.



Exercici 1.8: Proveu que un triangle obtusangle en té l'ortocentre fora.

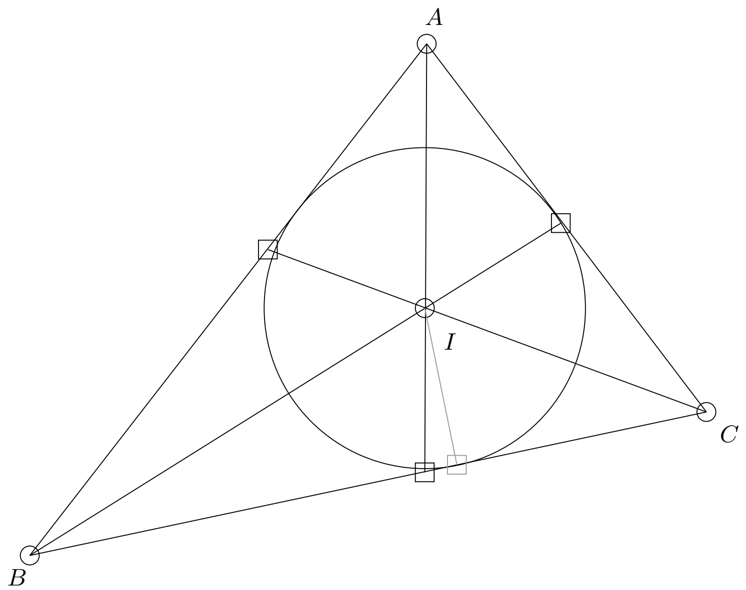
Exercici 1.9: Proveu que si un triangle té dues altures iguals, aleshores és isòsceles.

Els punts D, E i F s'anomenen els *peus* de les altures, i el triangle $\triangle DEF$ s'anomena el *triangle òrtic* de $\triangle ABC$.

Incentre. La *bisectriu* d'un angle és la recta que el divideix en dos d'iguals; dit d'altra manera, la bisectriu és el lloc geomètric dels punts que equidisten de les dues semirectes que defineixen l'angle.

Si $\triangle ABC$ és un triangle, anomenarem *segment bisectriu* en A el segment que uneix A amb el punt d'intersecció de la (recta) bisectriu amb el costat BC.

Les tres bisectrius d'un triangle també son concurrents, en un punt que s'anomena *incentre* de $\triangle ABC$. Aquest punt és el centre de la *circumferència inscrita´*. És una circumferència tangent als tres costats del triangle i el seu radi és l'*inradi.*



Teorema 1.2: *L'àrea d'un triangle és el producte del seu semiperímetre i del inradi:*

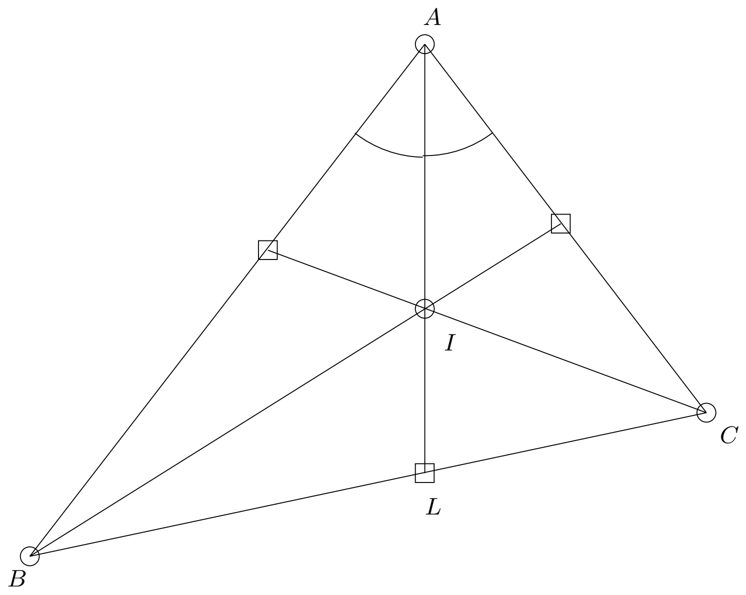
$$(ABC) = sr.$$

1.3 El teorema dels sinus

Teorema 1.3: *En un triangle $\triangle ABC$ amb circumradi R es compleix que*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\sin B} = 2R$$

Exercici 1.10: Trobeu quina relació lliga (BL), (LC), $b = (AC)$ i $c = (AB)$. Indicació: feu servir el teorema dels sinus en els triangles $\triangle ABL$ i $\triangle ACL$.



1.4 El teorema del cosinus

El teorema del cosinus és una generalització del teorema de Pitágoras en els triangles no rectangles. Relaciona un costat d'un triangle amb els altres dos i amb el cosinus de l'angle que formen.

Teorema 1.4: *En un triangle $\triangle ABC$ es compleix que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

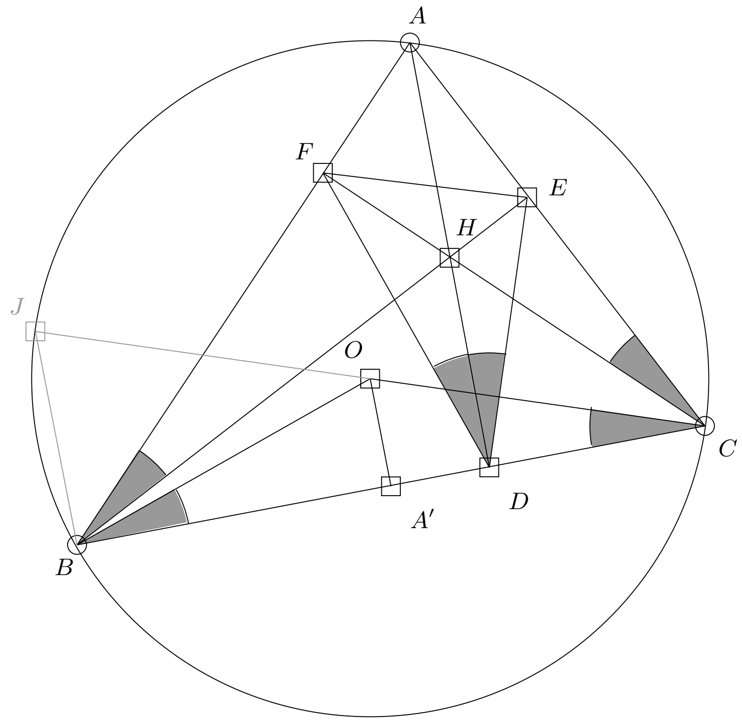
Exercici 1.11: Demostra aquesta fòrmula per calcular l'àrea d'un triangle:

$$(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

1.5 El triangle òrtic

Recordem que el triangle òrtic d'un triangle donat és el que formen els tres peus de les altures.

Considerem la figura següent, on apareix un triangle acutangle $\triangle ABC$, el seu circumcentre O, el seu ortocentre H i el seu triangle òrtic $\triangle DEF$.



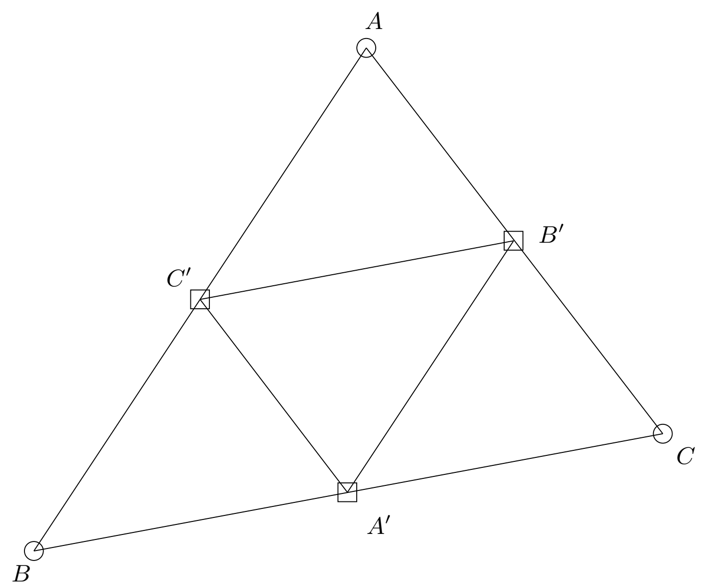
Teorema 1.5: *L'ortocentre d'un triangle acutangle coincideix amb l'incentre del seu triangle òrtic.*
Exercici 1.12: Proveu que FD és perpendicular a OB, DE a OC i EF a OA.
Exercici 1.13: Proveu les semblances de triangles:

$$\triangle AEF \sim \triangle DBF \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

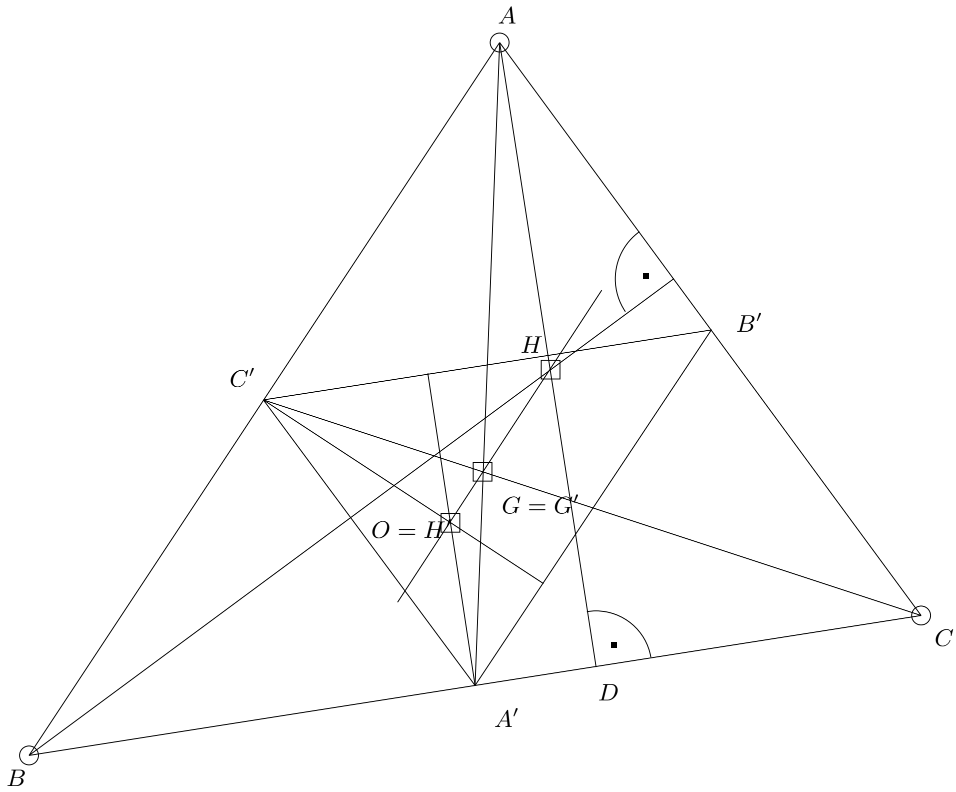
Exercici 1.14: Adapteu el resultat anterior al cas d'un triangle obtusangle.
Exercici 1.15: Proveu que $\angle HAO = |\angle B - \angle C|$.

1.6 El triangle medial i la recta d'Euler

El *triangle medial* d'un triangle $\triangle ABC$ és el triangle que té per vèrtexos els punts mitjans dels costats del triangle original:



Considerem també el centroide G i l'ortocentre H de $\triangle ABC$, i el circumcentre O' de $\triangle A'B'C'$.

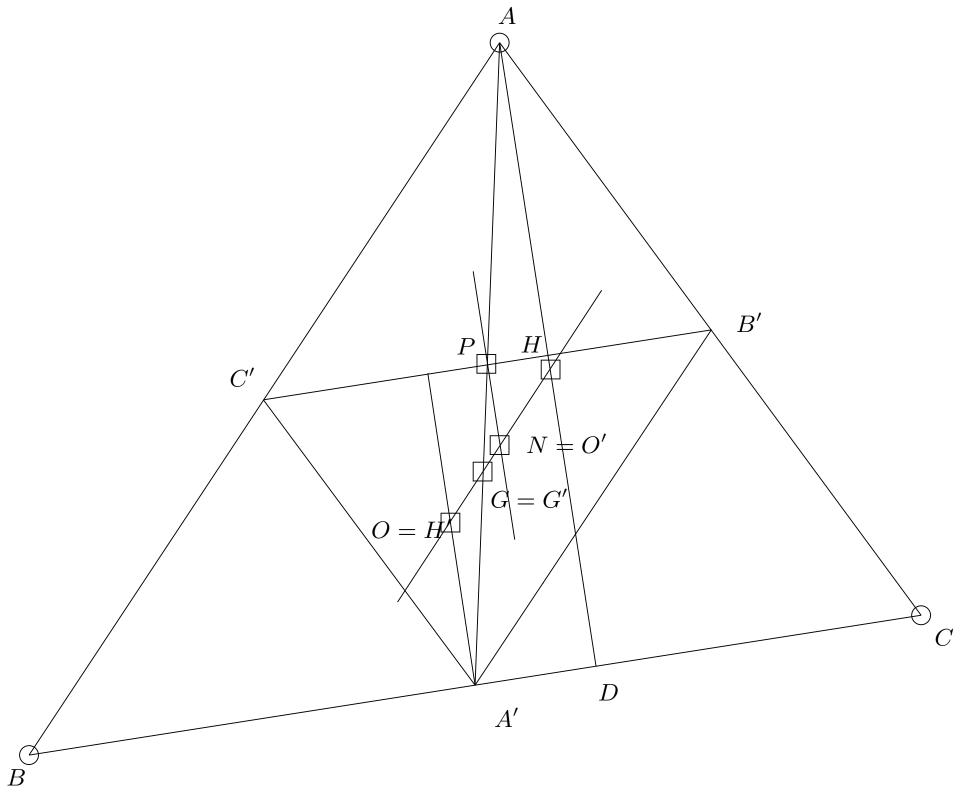


Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ són semblants ja que tenen costats paral·lels; a més, la raó entre costats corresponents és $2:1$.

Teorema 1.6: *L'ortocentre, el centroide i el circumcentre d'un triangle són col·lineals. El centroide divideix la distància entre l'ortocentre i el circumcentre en raó* $2:1$.

La recta que conté aquests tres punts s'anomena la *recta d'Euler* del triangle.

Considerem ara la figura següent:



Teorema 1.7: *El punt mitjà entre l'ortocentre i el circumcentre d'un triangle és el circumcentre del seu triangle medial.*

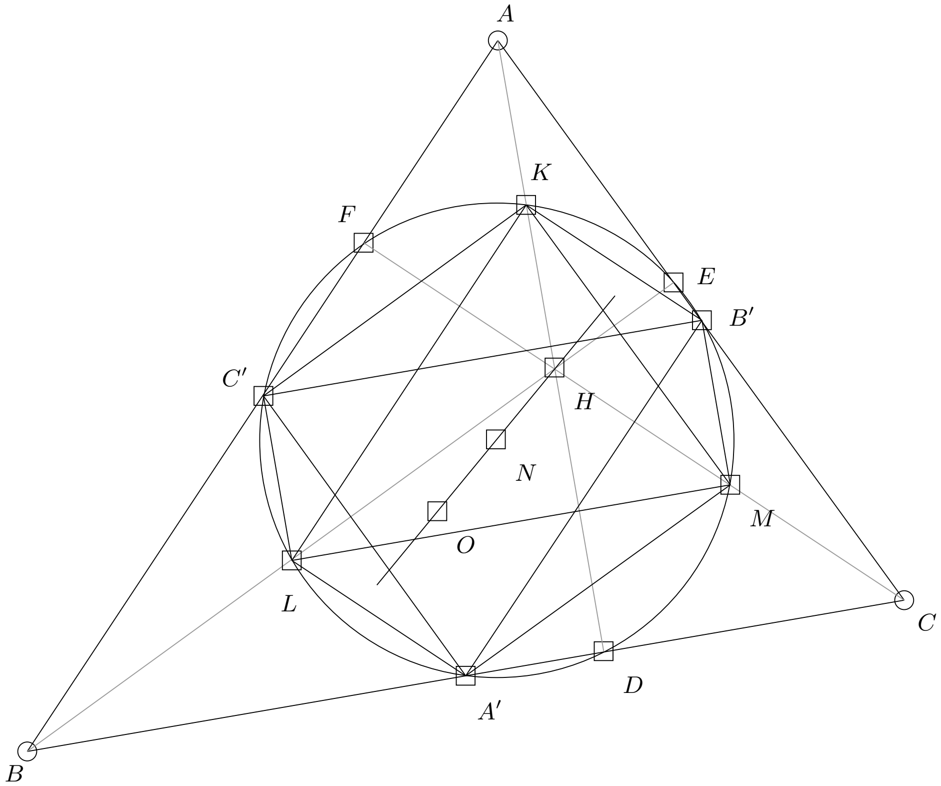
Exercici 1.16: Feu el dibuix anàleg en el cas que el triangle sigui obtusangle.

Exercici 1.17: Proveu que $(OH)^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

Exercici 1.18: Proveu que $(DA') = |b^2 - c^2|/2a$.

1.7 La circumferència dels nou punts

Teorema 1.8: *En un triangle, els tres peus de les altures, els tres punts mitjans dels costats i els tres punts mitjans dels segments que uneixen els vèrtexos amb l'ortocentre es troben sobre una mateixa circumferència.*



Exercici 1.19: Proveu que el radi de la circumferència dels nou punts és la meitat del circumradi.

Considerem els dos triangles $\triangle A'B'C'$ i $\triangle KLM$; aquests són iguals; un s'obté a partir de l'altre fent un gir de 180º amb centre el centre de la circumferència dels nou punts. Aquest gir intercanvia els seus ortocentres H i O. Per tant, aquest centre és el punt N que havíem considerat abans (el punt mitjà de H i O).

Teorema 1.9: *El centre de la circumferència dels nou punts es troba sobre la recta d'Euler; concretament, és el punt mitjà de l'ortocentre i el circumcentre del triangle.*

Exercici 1.20: Proveu que el quadrilàter $AKA'O$ és paral·lelogram.

Exercici 1.21: Proveu que en la circumferència de nou punts, el punt K (resp. L i M) biseca l'arc EF (resp. FD i DE).

Exercici 1.22: La circumferència circumscrita a $\triangle ABC$ és la circumferència dels nou punts del triangle amb vèrtexos els excentres I_a, I_b, I_c de $\triangle ABC$.

2 Circumferències

2.1 Tangències

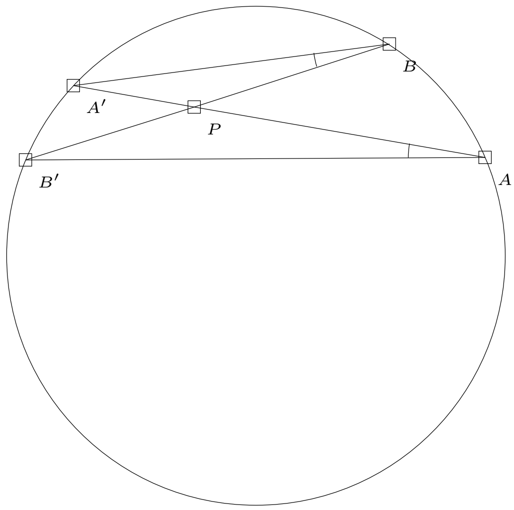
Sigui Γ una circumferència de centre O i radi r. Donat un punt $P \in \Gamma$, la perpendicular per P al segment radial OA és per definició la tangent a Γ per P.

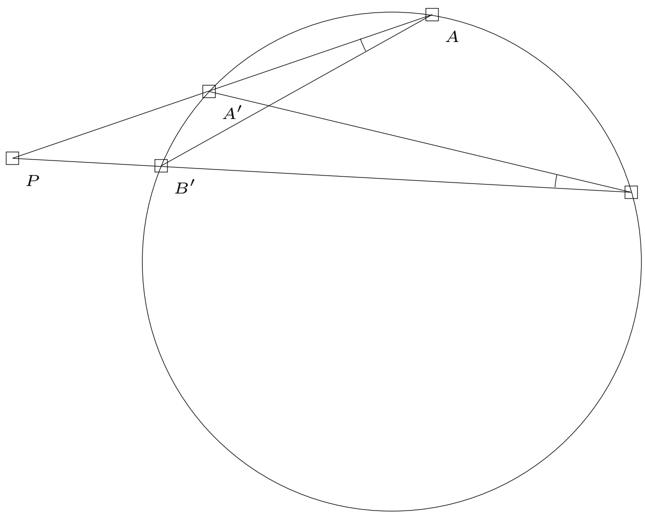
2.2 Potència d'un punt respecte d'una circumferència

Sigui Γ una circumferència i P un punt no sobre Γ.

Teorema 2.1: *Considerem dues rectes que passen per P; si la primera talla Γ en dos punts A i A' (possiblement coincidents, en el cas que la recta sigui tangent a Γ) i la segona en B i B', aleshores*

$$(PA) \cdot (PA') = (PB) \cdot (PB').$$





Per tant, el producte de les distàncies entre un punt P i els dos punts de tall d'una recta que passa per P amb una circumferència Γ tan sols depèn de P i de Γ; aquesta constant s'anomena la *potència* de P respecte de Γ.

Es pot trobar una expressió molt senzilla per a la potència considerant la recta que passa per P i O, el centre de Γ. Diguem $d = (OP)$ i R el radi de Γ. Si el punt és interior a la circumferència, aleshores la potència és $(R+d)(R-d) = R^2 - d^2$. Si el punt és exterior, aleshores és $(d+R)(d-R) = d^2 - R^2$.

Sovint es considera la potència "amb signe" de manera que punts interiors a la circumferència es consideren amb signe negatiu i els exteriors amb signe positiu. Amb aquest conveni, l'expressió per a la potència (amb signe) és sempre $d^2 - R^2$.

Exercici 2.1: Considerant la potència amb signe, quin és el menor valor que pot prendre? A quin punt el pren?

Exercici 2.2: Quin és el lloc geomètric dels punts amb potència constant respecte d'una circumferència?

Exercici 2.3: Si la potència (amb signe) d'un punt respecte d'una circumferència és t^2, interpreta t geomètricament.

2.3 Eix radical de dues circumferències

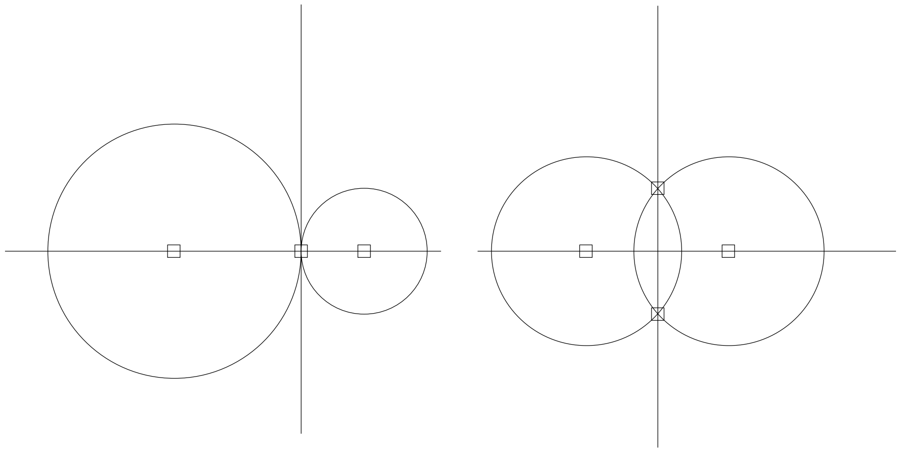
Siguin Γ_1 i Γ_2 dues circumferències, amb centres respectius O_1 i O_2 i radis r_1 i r_2. S'anomena *eix radical* de Γ_1 i Γ_2 el lloc geomètric dels punts tals que la seva potència respecte de Γ_1 i Γ_2 és igual.

Teorema 2.2: *L'eix radical de dues circumferències no concèntriques és una recta perpendicular a la recta que uneix els centres de les circumferències.*

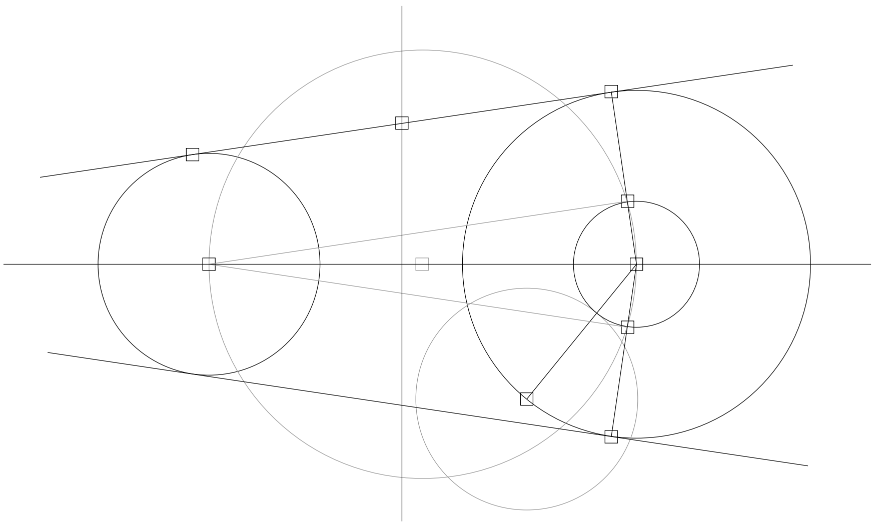
Exercici 2.4: Què passa si les circumferències són concèntriques?

Així, doncs, per tal de trobar l'eix radical n'hi ha prou amb trobar-ne un punt:

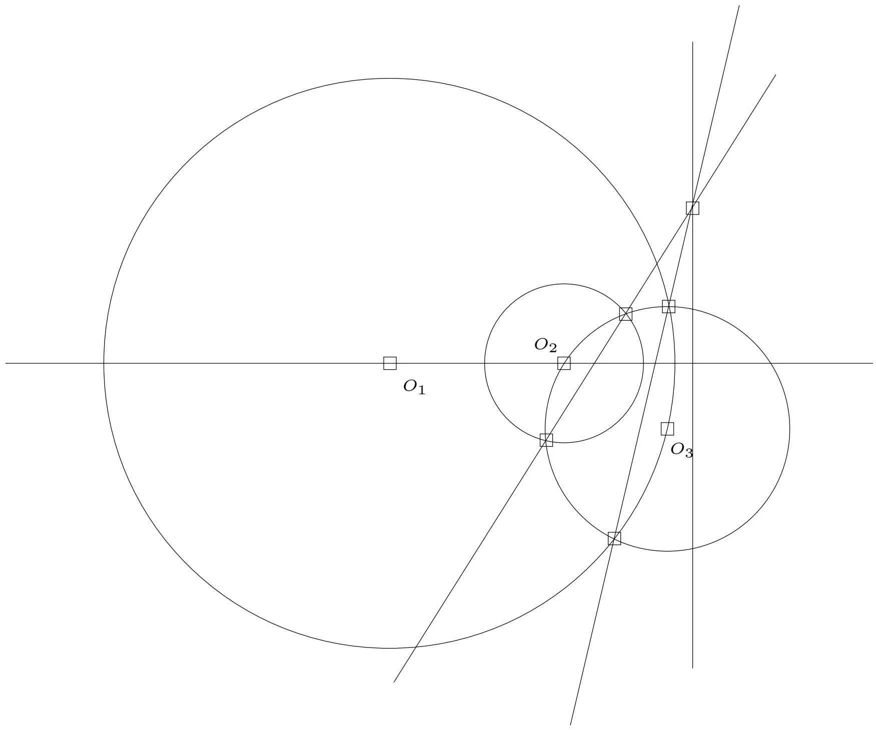
- Si les circumferències s'intersequen en algun punt, aleshores aquest punt pertany a l'eix radical (la potència respecte de les dues circumferències és zero).



- Si són exteriors l'una de l'altra, traçant un segment tangent comú P_1P_2, el punt mitjà d'aquest segment pertany a l'eix radical (per què?).



- Si una és interior a l'altra, sigui Γ_3 una circumferència secant a les altres dues i amb centre O_3 fora de O_1O_2. Siguin P_1, P_1' els dos punts d'intersecció amb Γ_1 i P_2, P_2' els dos punts d'intersecció amb Γ_2. L'eix radical de Γ_1 i Γ_3 és la recta que uneix P_1 i P_1'; l'eix radical de Γ_2 i Γ_3 és la recta que uneix P_2 i P_2'; aquestes dues rectes no són paral·leles, ja que són perpendiculars, respectivament, a O_1O_3 i O_1O_2, i aquestes no són paral·leles per construcció. Per tant, aquests dos eixos radicals es tallen en un punt tal que la potència respecte de Γ_1 i Γ_3 és igual i tal que la potència respecte de Γ_2 i Γ_3 és igual. Per tant aquest punt pertany a l'eix radical de Γ_1 i Γ_2.



Si tres circumferències tenen centres no alineats, els tres eixos axials són no paral·lels i es tallen en un únic punt (perquè són concurrents?) que s'anomena *centre radical* de les tres circumferències.

Exercici 2.5: Siguin dues circumferències tangents internament i sigui T el punt de tangència. Sigui AB una corda de la circumferència de major radi que és tangent a l'altra en un punt P. Proveu que la recta TP biseca l'angle $\angle ATB$.

Exercici 2.6: Siguin tres circumferències que no s'intersequen i O el seu centre radical. Proveu que els sis punts de contacte de les sis tangents des de O a les circumferències són concíclics.

3 Quadrilàters

En aquest tema repasarem algunes propietats importants dels quadrilàters.

3.1 El teorema de Varignon

Teorema 3.1: *Si $ABCD$ és un quadrilàter qualsevol, els punts mitjans P, Q, R, S dels seus costats (P punt mitjà de AB, Q punt mitjà de BC,...) són els vèrtexs d'un paral·lelogram $PQRS$, que s'anomena el paral·lelogram de Varignon de $ABCD$. A més, l'àrea d'aquest és la meitat de l'àrea del quadrilàter original.*

El primer resultat de concurrència ve donat pel següent:

Teorema 3.2: *En un quadrilàter, els segments que uneixen els punts mitjans dels parells de costats oposats i el segment que uneix els punts mitjans de les diagonals són concurrents i cadascun biseca els altres.*

Exercici 3.1: Proveu que el perímetre del quadrilàter de Varignon és igual a la suma de les diagonals del quadrilàter original.

Exercici 3.2: Un trapezi és un quadrilàter amb un parell de costats oposats paral·lels entre si; un trapezi es diu isòsceles si els dos costats no paral·lels són congruents. Proveu que si un trapezi isòsceles té costats iguals de longitud a, i costats paral·lels de longituds b i c, aleshores les dues diagonals són congruents i, si d és la seva longitud, es té $d^2 = a^2 + bc$.

3.2 Quadrilàters cíclics

Un quadrilàter és *cíclic* si té els quatre vèrtexs sobre una mateixa circumferència. En aquesta situació es diu que el quadrilàter està *inscrit* en la circumferència.

Teorema 3.3: *Un quadrilàter és cíclic si, i només si, la suma de dos dels seus angles oposats és* 180°.

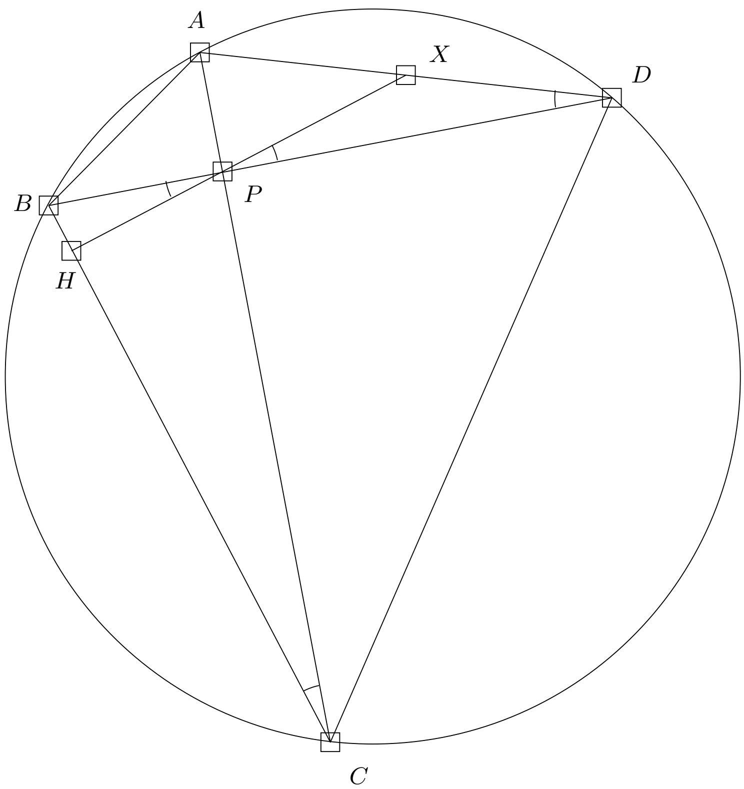
En general, els costats d'un quadrilàter no determinen la seva àrea; en el cas dels quadrilàters cíclics, sí que ho fan:

Teorema 3.4: *Si un quadrilàter cíclic té costats a, b, c, d, posant s el seu semiperímetre, $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, i K l'àrea del quadrilàter, es té*

$$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

En quadrilàters cíclics tenim un altre resultat sobre bisecció:

Teorema 3.5: *Si un quadrilàter cíclic té diagonals perpendiculars, sigui P el seu punt d'intersecció, aleshores la perpendicular per P a qualsevol costat biseca el costat oposat.*



Exercici 3.3: Proveu que si un quadrilàter cíclic amb costats a, b, c, d es pot circumscriure a una circumferència, aleshores la seva àrea K ve donada per

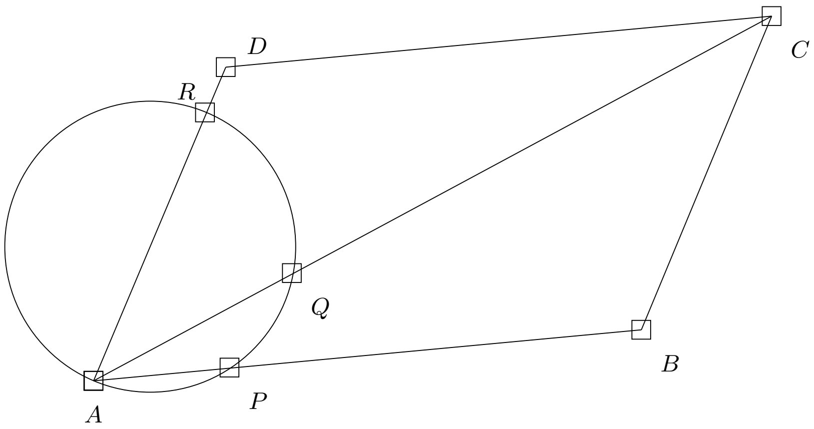
$$K^2 = abcd.$$

El darrer resultat important relatiu a quadrilàters cíclics és el següent.

Teorema 3.6 (Teorema de Ptolomeu)**:** *Si un quadrilàter s'inscriu en una circumferència, la suma dels productes dels costats oposats és igual al producte de les diagonals.*

Exercici 3.4: Proveu que si P es troba sobre l'arc CD de la circumferència circumscrita a un quadrat $ABCD$, aleshores $(PA)((PA) + (PC)) = (PB)((PB) + (PD))$.

Exercici 3.5: Sigui $ABCD$ un paral·lelogram i Γ una circumferència que passa per A i talla el costat AD en R, el costat AB en P i la diagonal AC en Q.



Proveu que $(AP)(AB) + (AR)(AD) = (AQ)(AC)$. Indicació: el triangle $\triangle PQR$ serà semblant a $\triangle CBA$.