## El principi del colomer

El *principi del colomer*, o *de les caselles* o *de Dirichlet*, és l'observació òbvia que si heu de repartir $n$ coloms en $m$ gàbies i $n > k \cdot m$, qualque gàbia contindrà més de $k$ coloms.

**1)** Demostrau que, en qualsevol classe de 13 estudiants, sempre n'hi ha com a mínim 7 del mateix sexe.

**2)** Demostrau que, en qualsevol grup de 13 persones, sempre n'hi ha com a mínim 2 de nascudes el mateix mes (possiblement de diferents anys)

**3)** Demostrau que qualsevol subconjunt de $2n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ sempre conté tres nombres consecutius.

**4)** Sigui $C = \{r_1, \ldots, r_{n+1}\}$ un conjunt qualsevol format per $n+1$ nombres reals $r_i$ tals que $0 \leq r_i < 1$. Demostrau que hi ha com a mínim dos elements $r_i, r_j$ de $C$ tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

**5)** Demostrau que, en qualsevol conjunt $A$ de $n+1$ nombres naturals, sempre hi ha com a mínim dos nombres $a, b \in A$ tals que $a - b$ és divisible per $n$.

**6)** Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té dues potències diferents tals que la seva diferència és divisible per 2012.

**7)** Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té un múltiple de la forma $\overbrace{1\ldots1}^{k}\overbrace{0\ldots0}^{l}$ amb $k, l > 0$.

---

**8)** Donats 12 nombres diferents de 2 xifres, sempre n'hi ha dos la diferència dels quals és un nombre de 2 xifres de la forma $aa$.

**9)** Siguin $a, d, n$ nombres naturals tals que cap dels nombres $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ és divisible per $n$. Demostrau que $d$ i $n$ no són coprimers.

**10)** Siguin $a_1, \ldots, a_n$ $n$ nombres naturals qualssevol i no necessàriament diferents. Demostrau que sempre hi ha un subconjunt d'aquests nombres amb llur suma divisible per $n$.

**11)** Demostrau que qualsevol subconjunt de $n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ conté qualque parella de nombres diferents tal que un divideix l'altre.

**12)** Escrivim els nombres 1 a 101 en l'ordre que volguem. Demostrau que sempre en podem tatxar 90 de manera que els 11 que queden formin una seqüència creixent o decreixent.

**13)** Sigui $a$ un nombre que no és divisible ni per 2 ni per 5. Demostrau que per qualsevol $n$ sempre hi ha una potència de $a$ que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

**14)** Seleccionam 340 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau que podem situar un cub petit de costat de longitud 1 dins el cub gran de tal manera que no contengui cap dels punts seleccionats.

**15)** Seleccionam 350 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau sempre n'hi ha dos que estan a distància menor que 1.75.

**16)** Sigui $S$ un conjunt qualsevol de $k$ nombres naturals, tots $\leq n$, i suposem que $k > (n+1)/2$. Demostrau que dins $S$ sempre n'hi ha dos (poden ser el mateix) tals que la seva suma també pertany a $S$.

**17)** Tenim 6 persones que poden haver parlat o no per telèfon. Demostrau que o n'hi ha 3 que han parlat totes amb totes, o n'hi ha 3 que cap ha parlat amb cap.

**18)** Demostrau que tot nombre de 16 xifres conté una seqüència de una o més xifres consecutives el producte de les quals és un quadrat perfecte.

**19)** Una societat internacional té membres de 6 països diferents. La llista dels seus membres té 2012 noms, i els numeram 1,2,..., 2012. Demostrau que hi ha qualque membre tal que el seu nombre és o bé la suma de dos nombres de membres del seu país, o el doble del nombre d'un membre del seu país.

**20)** En un torneig de $n$ jugadors que es desenvolupa al llarg d'un mes, cada un juga amb tots els altres exactament una vegada. Cada partida es juga quan va bé als dos jugadors, sense calendari fixat. Demostrau que, en qualsevol moment del mes, hi ha sempre dos jugadors que han jugat el mateix nombre de partides.

**21)** Escollim 20 nombres naturals entre 1 i 69. Demostrau que entre les seves diferències hi ha com a mínim 4 nombres iguals.

**22)** Sigui $n$ un nombre coprimer amb 10. Demostrau que té un múltiple format tot per uns.

**23)** Sigui $S$ un conjunt de 10 nombres de 2 xifres. Demostrau que sempre podem escollir dos subconjunts disjunts de $S$ tals que les sumes de llurs elements són les mateixes.

**24)** Siguin $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ dues reordenacions dels nombres $1, 2, \ldots, 100$. Demostrau que entre els productes $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{100}b_{100}$ sempre n'hi ha dos amb el mateix residu mòdul 100.

**25)** Dins un conjunt de 52 nombres naturals qualssevol, sempre hi ha almanco una parella tal que la seva suma o la seva diferència és divisible per 100.