El *principi del colomer*, o *de les caselles* o *de Dirichlet*, és l'observació òbvia que si heu de repartir n coloms en m gàbies i $n > k \cdot m$, qualque gàbia contindrà més de k coloms.

1) Demostrau que, en qualsevol classe de 13 estudiants, sempre n'hi ha com a mínim 7 del mateix sexe.

Si només n'hi hagués com a màxim 6 de cada sexe, en total hi hauria com a màxim 12 estudiants.

2) Demostrau que, en qualsevol grup de 13 persones, sempre n'hi ha com a mínim 2 de nascudes el mateix mes (possiblement de diferents anys)

Com que $13 > 12$, a algun mes li han de tocar 2 o més persones.

3) Demostrau que qualsevol subconjunt de $2n + 1$ nombres extrets de $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ sempre conté tres nombres consecutius.

Repartim els nombres del conjunt $\{1, \ldots, 3n\}$ en els n conjunts

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \ldots, \{3n - 2, 3n - 1, 3n\}.$$

Si ens donen un conjunt de $2n+1$ nombres de $\{1, \ldots, 3n\}$, n'hi haurà almanco 3 que pertanyin al mateix conjunt d'aquests: seran tres nombres consecutius.

4) Sigui $C = \{r_1, \ldots, r_{n+1}\}$ un conjunt qualsevol format per $n + 1$ nombres reals r_i tals que $0 \leq r_i < 1$. Demostrau que hi ha com a mínim dos elements r_i, r_j de C tals que $|r_i - r_j| < \dfrac{1}{n}$.

Dividiu el segment $[0, 1[$ en els n segments disjunts

$$\Big[0, \frac{1}{n}\Big[, \Big[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big[, \Big[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\Big[, \ldots, \Big[\frac{n-1}{n}, 1\Big[.$$

Si ens donen $n+1$ nombres dins $[0, 1[$, almanco dos pertanyeran al mateix bocí $[k/n, (k+1)/n[$ i per tant estaran a distància $< 1/n$.

5) Demostrau que, en qualsevol conjunt A de $n + 1$ nombres naturals, sempre hi ha com a mínim dos nombres $a, b \in A$ tals que $a - b$ és divisible per n.

Hi ha n possibles residus de dividir un nombre per n: $0, 1, \ldots, n - 1$. Llavors, donats $n + 1$ nombres naturals, n'hi haurà almanco 2 que donin el mateix romanent en dividir-los per n. Siguin a i b dos d'aquests nombres. Aleshores, $a - b$ és divisible per n (si $a = q_1 \cdot n + m$ i $b = q_2 \cdot n + m$, aleshores $a - b = (q_1 - q_2)n$).

6) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té dues potències diferents tals que la seva diferència és divisible per 2012.

Considerau el conjunt $\{n^0, n^1, \ldots, n^{2012}\}$. D'aquests 2013 nombres, n'hi haurà com a mínim 2 tals que la seva diferència és divisible per 2012.

7) Demostrau que tot nombre natural $n \geq 2$ té un múltiple de la forma $\overbrace{1\ldots1}^{k}\overbrace{0\ldots0}^{l}$ amb $k, l > 0$.

En un conjunt de $n+1$ nombres, per força n'hi haurà 2 tals que la seva diferència és divisible per n. Considerau ara el conjunt

$$\{1, 11, 111, 1111, \ldots, \overbrace{11\ldots11}^{n+1}\}.$$

D'aquests $n+1$ nombres, n'hi haurà com a mínim una parella tal que la seva diferència sigui divisible per n. Siguin $\overbrace{1\dots1}^{k_1}$ i $\overbrace{1\dots1}^{k_2}$, amb $k_2 > k_1$, una d'aquestes parelles. Observau aleshores que

$$\overbrace{1\dots1}^{k_2} - \overbrace{1\dots1}^{k_1} = \overbrace{1\dots1}^{k_2-k_1}\overbrace{0\dots0}^{k_1}$$

té la forma demanada.

---

8) Donats 12 nombres diferents de 2 xifres, sempre n'hi ha dos la diferència dels quals és un nombre de 2 xifres de la forma aa.

Dos d'aquests nombres tendran la diferència divisible per 11.

9) Siguin a, d, n nombres naturals tals que cap dels nombres $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ és divisible per n. Demostrau que d i n no són coprimers.

Suposem que cap de $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ és divisible per n. Com que hi ha n nombres i els possibles residus en dividir-los per n són $1, \dots, n-1$ (no pot donar 0), dos donaran el mateix residu i per tant n en dividirà la diferència, que tendrà la forma kd amb $k < n$. Naturalment, això implica que n i d no són coprimers: en cas contrari, n dividiria k.

10) Siguin $a_1, \dots, a_n$ n nombres naturals qualssevol i no necessàriament diferents. Demostrau que sempre hi ha un subconjunt d'aquests nombres amb llur suma divisible per n.

Considerem els n nombres

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Si algun és divisible per n, ja estam. Si cap no ho és, els possibles residus en dividir-los per n són $1, 2, \dots, n-1$, i per tant dos donen el mateix residu, i la seva diferència serà divisible per n. Però

$$s_j - s_i = a_{i+1} + \dots + a_j$$

i ja tenim una suma divisible per n.

11) Demostrau que qualsevol subconjunt de $n+1$ nombres extrets de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ conté qualque parella de nombres diferents tal que un divideix l'altre.

Siguin $a_1, \dots, a_{n+1}$ els nombres escollits, i escrivim cada un $a_i = 2^{k_i} b_i$ amb b_i imparell. Aleshores $b_1, \dots, b_{n+1}$ són nombres imparells que també estan entre 1 i $2n$, i com que entre aquests dos nombres només hi ha n nombres imparells diferents, dos hauran de ser iguals. Si ara $b_i = b_j = b$, tenim que $a_i = 2^{k_i} b$ i $a_j = 2^{k_j} b$, i el més petit dividirà el més gran.

12) Escrivim els nombres 1 a 101 en l'ordre que volguem. Demostrau que sempre en podem tatxar 90 de manera que els 11 que queden formin una seqüència creixent o decreixent.

Sigui $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ l'ordenació dels nombres $1, 2, \dots, 101$ triada. Diguem una subseqüència d'aquesta seqüència de nombres a qualsevol seqüència $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}$ amb $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Ens demanen que demostrem que la nostra ordenació conté qualque subseqüència de longitud 11 que és creixent o decreixent.

Per a cada nombre m, sigui L_m la longitud màxima d'una subseqüència creixent que acabi amb a_m i R_m la longitud màxima d'una subseqüència decreixent que comenci amb a_m. Per a cada p, q diferents, ha de passar que $L_p \neq L_q$ o $R_p \neq R_q$. En efecte, suposem que $p < q$, de manera que a_p apareix a l'esquerra de a_q. Aleshores, si $a_p < a_q$ tenim que $L_q \geq L_p + 1$, i si $a_p > a_q$, tenim que $L_p \geq L_q + 1$.

Considerem per tant les parelles (L_m, R_m). Totes són diferents, i per tant n'hi ha 101. Ara si no existís cap subseqüència creixent o decreixent de 11 elements, tendríem que $L_m, R_m \leq 10$ per a cada m i per tant el nombre possible de parells (L_m, R_m) seria com a molt 100. Contradicció.

13) Sigui a un nombre que no és divisible ni per 2 ni per 5. Demostrau que per qualsevol n sempre hi ha una potència de a que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

Considerem les potències successives a^k i prenguem el seu residu mòdul 10^n. Aleshores n'hi haurà dues que tendran el mateix residu, i per tant llur diferència serà divisible per 10^n. Suposem que

$$10^n \mid a^j - a^i = a^i(a^{j-i} - 1)$$

Com que a i 10 són coprimers, això implica que $10^n \mid a^{j-i} - 1$ i per tant $a^{j-i} = 10^n \cdot N + 1$, que acaba en $\overbrace{00\ldots01}^{n}$.

14) Seleccionam 340 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau que podem situar un cub petit de costat de longitud 1 dins el cub gran de tal manera que no contengui cap dels punts seleccionats.

Subdividim el cub en $7^3 = 343$ cubs de costat 1. Com que tenim 340 punts, qualcun d'aquests cubs no contendrà cap punt d'aquests.

15) Seleccionam 350 punts qualssevol dins un cub de costat de longitud 7. Demostrau sempre n'hi ha dos que estan a distància menor que 1.75.

Subdividim el cub en $7^3 = 343$ cubs de costat 1. Com que tenim 350 punts, dos d'aquests punts estaran dins el mateix cub. La distància màxima dins aquest cubet és la diagonal, que és $\sqrt{3} = 1.732\ldots$, i per tant dos punts dins un cub d'aquests estan a distància menor que 1.75.

16) Sigui S un conjunt qualsevol de k nombres naturals, tots $\leq n$, i suposem que $k > (n+1)/2$. Demostrau que dins S sempre n'hi ha dos (poden ser el mateix) tals que la seva suma també pertany a S.

Sigui a_1 l'element més petit de S, i considerem les diferències $D = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1\}$. Aleshores entre D i S tenim $2k - 1 > n$ nombres naturals $\leq n$, i per tant n'hi ha d'haver dos de repetits. Com que tots els nombres de D són diferents, i tots els nombres de S són diferents, concloem que $D \cap S \neq \emptyset$. És a dir, existeixen k, j tals que $a_k - a_1 = a_j$ i per tant $a_k = a_1 + a_j$.

17) Tenim 6 persones que poden haver parlat o no per telefon. Demostrau que o n'hi ha 3 que han parlat totes amb totes, o n'hi ha 3 que cap ha parlat amb cap.

Fem-ho gràfic. Dibuixau 6 punts que representen les 6 persones, uniu cada parella de persones amb una línia blava si han parlat per telefon i vermella si no hi han parlat. L'enunciat diu que hem de trobar un triangle amb els tres costats del mateix color (blau, 3 persones que han parlat entre elles; vermell, 3 persones que no han parlat). Preneu una persona qualsevol: d'ella parteixen 5 línies, i per tant 3 tendran el mateix color. Si entre qualque parella de les persones a l'altre costat d'aquestes tres línies hi ha una línia d'aquest mateix color, ja tenim un triangle d'aquest color. Si no, les tres persones aquestes formen un triangle de l'altre color.

18) Demostrau que tot nombre de 16 xifres conté una seqüència de una o més xifres consecutives el producte de les quals és un quadrat perfecte.

Siguin $a_1, \ldots, a_{16}$ les xifres del nombre donat, llegides d'esquerra a dreta. Posem $x_0 = 1$ i $x_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_i$, per a $i = 1, \ldots, 16$. Aleshores cada x_i tindrà la forma $2^{q_i}3^{q_i}5^{r_i}7^{s_i}$. Ara, de vectors de paritats de longitud 4 n'hi ha 16, i tenim 17 nombres x_i. Per tant, dos d'aquests nombres, diguem x_k i x_l amb $l > k$, tindran els exponents de les mateixes paritats. Aleshores el quocient x_l/x_k tindrà tots els exponents parells, i per tant serà un quadrat perfecte, i és igual a $a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_l$.

19) Una societat internacional té membres de 6 països diferents. La llista dels seus membres té 2012 noms, i els numeram 1,2,..., 2012. Demostrau que hi ha qualque membre tal que el seu nombre és o bé la suma de dos nombres de membres del seu país, o el doble del nombre d'un membre del seu país.

Suposem que no. Com que $2012/6 = 335.33$, qualque país, diguem-ne P_1, tendrà com a mínim 336 nombres,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{336}.$$

Aleshores cap diferència $a_{336} - a_i$ és d'aquest país (o del contrari a_{336} seria la suma de dos nombres d'aquest país) i per tant totes aquestes diferències són dels altres paisos. Ara, com que $335/5 = 67$, algun dels altres països, diguem-ne P_2, conté com a mínim 67 d'aquestes diferències

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{67}.$$

Aleshores cap diferència $b_{67} - b_i$ és d'aquest país (o del contrari b_{67} seria la suma de dos nombres d'aquest país), i tampoc és de P_1, perquè

$$a_j = b_{67} - b_i = (a_{336} - a_{k_{67}}) - (a_{336} - a_{k_i}) = a_{k_i} - a_{k_{67}} \Rightarrow a_{k_i} = a_j + a_{k_{67}}$$

Per tant totes aquestes diferències pertanyen als altres quatre països. Ara, com que $66/4 = 16.5$, algun dels altres països, diguem-ne P_3, conté com a mínim 17 d'aquestes diferències

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_{17}.$$

Aleshores cap diferència $c_{17} - c_i$ és d'aquest país (o del contrari c_{17} seria la suma de dos nombres d'aquest país), i tampoc és de P_2 ni de P_1:

$$\begin{aligned} b_j &= c_{17} - c_i = (b_{67} - b_{k_{17}}) - (b_{67} - b_{k_i}) = b_{k_i} - b_{k_{17}} \Rightarrow b_{k_i} = b_j + b_{k_{17}} \\ a_j &= c_{17} - c_i = (b_{67} - b_{k_{17}}) - (b_{67} - b_{k_i}) = b_{k_i} - b_{k_{17}} \\ &= (a_{336} - a_{k_{k_i}}) - (a_{336} - a_{k_{k_{17}}}) = a_{k_{k_{17}}} - a_{k_{k_i}} \Rightarrow a_{k_{k_{17}}} = a_j + a_{k_{k_i}} \end{aligned}$$

Per tant aquestes diferències pertanyen als altres tres països. Ara, com que $17/3 = 5.66$, algun dels altres països, diguem-ne P_4, conté com a mínim 6 d'aquestes diferències

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_6.$$

Aleshores cap diferència $d_6 - d_i$ és d'aquest país i tampoc és de P_3, P_2 o P_1 (mateix argument), i per tant aquestes diferències pertanyen als altres dos països. Ara, com que $6/2 = 3$, algun dels altres països, diguem-ne P_5, conté com a mínim 3 d'aquestes diferències

$$e_1 < e_2 < e_3$$

Aleshores $f_1 = e_3 - e_1$ ni $f_2 = e_3 - e_2$ no són ni d'aquest país ni tampoc de P_4, P_3, P_2 o P_1 (mateix argument), i per tant totes dues són de P_6, i per l'argument usual $f_1 - f_2$ no és de cap de $P_6, \ldots, P_1$, i això és impossible, perquè serà un nombre entre 1 i 2012 i ha de pertànyer a algun dels 6 països.

20) En un torneig de n jugadors que es desenvolupa al llarg d'un mes, cada un juga amb tots els altres exactament una vegada. Cada partida es juga quan va bé als dos jugadors, sense calendari fixat. Demostrau que, en qualsevol moment del mes, hi ha sempre dos jugadors que han jugat el mateix nombre de partides.

A cada moment, els nombres possibles de partides jugades per cada jugador són $0, \dots, n-1$. Ara bé, si qualque jugador ha jugat 0 partides, és impossible que un altre jugador n'hagi jugat $n-1$. Per tant en cada moment hi ha només $n-1$ nombres diferents de partides jugades per cada jugador, i com que hi ha n jugadors, dos han jugat el mateix nombre de partides.

21) Escollim 20 nombres naturals entre 1 i 69. Demostrau que entre les seves diferències hi ha com a mínim 4 nombres iguals.

Siguin $a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ aquests nombres i considerem

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) = a_{20} - a_1 \leq 68$$

Suposem ara que entre les 19 diferències $a_{i+1} - a_i$ no n'hi ha 4 d'iguals. Aleshores

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{20} - a_{19}) \geq 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 6 + 7 = 70.$$

Contradicció.

22) Sigui n un nombre coprimer amb 10. Demostrau que té un múltiple format tot per uns.

Considerem els nombres $1, 11, 111, 1111, \dots$. D'entre aquests, dos han de donar el mateix residu en dividir per n, i per tant la diferència serà un múltiple de n. Ara la diferència serà de la forma

$$\overbrace{11\cdots1}^{p}\overbrace{00\cdots0}^{q} = \overbrace{11\cdots1}^{p} \cdot 10^q$$

i com que n és coprimer amb 10, si n divideix $\overbrace{11\cdots1}^{p} \cdot 10^q$, ha de dividir $\overbrace{11\cdots1}^{p}$.

23) Sigui S un conjunt de 10 nombres de 2 xifres. Demostrau que sempre podem escollir dos subconjunts disjunts de S tals que les sumes de llurs elements són les mateixes.

Les possibles sumes de subconjunts de fins a 10 nombres triats entre 10 i 99 van des de 10 (la del conjunt format només pel 10) fins a

$$99 + 98 + \cdots + 90 = 945$$

Hi ha per tant 936 sumes possibles de subconjunts de S. D'altra banda, el nombre de possibles subconjunts no buits d'un conjunt de 10 elements és

$$2^{10} - 1 = 1023.$$

Per tant, S contendrà dos subconjunts diferents amb la mateixa suma. Si llevam la intersecció d'aquests dos conjunts a cada un, obtenim dos subconjunts disjunts amb la mateixa suma.

24) Siguin $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ i $b_1, b_2, \dots, b_{100}$ dues reordenacions dels nombres $1, 2, \dots, 100$. Demostrau que entre els productes $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_{100} b_{100}$ sempre n'hi ha dos amb el mateix residu mòdul 100.

Suposem que els 100 residus són diferents. En particular, 50 d'aquests productes són parells i 50 imparells (del contrari, dos haurien de repetir-se). Els 50 productes imparells empren nombres imparells de cada costat, i per tant els empren tots. Això implica que els 50 productes parells són de fet productes de nombres parells, i per tant múltiples de 4. Però de residus de múltiples de 4 mòdul 100 només n'hi ha 25, i per tant n'hi ha d'haver de repetits entre aquests.

25) Dins un conjunt de 52 nombres naturals qualssevol, sempre hi ha almanco una parella tal que la seva suma o la seva diferència és divisible per 100.

Considerem les 51 capses següents: a $C_{00,00}$ hi posarem els nombres que acaben en 00 (comptant zeros a la dreta); a $C_{01,99}$ hi posarem els nombres que acaben en 01 o en 99; a $C_{02,98}$ hi posarem els nombres que acaben en 01 o en 99;..., a $C_{49,51}$ hi posarem els nombres que acaben en 49 o en 51; i a $C_{50,50}$ hi posarem els nombres que acaben en 50.

Com que tenim 52 nombres, dos hauran de caure a la mateixa capsa d'aquestes. I ara, si els dos nombres acaben igual, la diferència és divisible per 100, i si acaben diferent, la suma és divisible per 100.