EQUACIONS FUNCIONALS

Sessions de Preparació Olimpíades Matemàtiques

Sebastià Massanet Massanet

11 d'Octubre de 2012

1 Introducció

La resolució de problemes és el motor de les matemàtiques ja que s'hi combinen coneixement i estratègia, mètode científic i aventura intel·lectual. Entre els diversos tipus de problemes, destaca amb un llum pròpia la resolució d'equacions funcionals. La teoria d'equacions funcionals es va desenvolupar en el segle passat de la mà de Janos Aczél. Abans del s.XX, es troben petites i disperses contribucions de D'Alembert, Euler, Cauchy, Gauss. . . on s'estudien equacions amb funcions com incògnita. Avui en dia, aquest camp té aplicacions en economia, computació, lògica, física, estadística, etc.
Aquest article pretén ser una introducció al món de les equacions funcionals, presentant les equacions més emblemàtiques i les estratègies més comunes. L'objectiu principal és el de ser capaços d'atacar aquest problemes amb imaginació i astúcia ja que no existeix una guia de resolució fixa per aquest tipus de problemes. Camp lliure a la creativitat!

Definició 1. Una *equació funcional* és una igualtat on la incògnita és una funció (o diverses funcions), en una variable (o en diverses variables).

Exemple 2. Les següents expressions són equacions funcionals:

$$\begin{array}{lll} f(x+y)=f(x)+f(y) & f(x\cdot y)=f(x)+f(y) & f(x+f(y))=f(y+f(x)) \\ f(f(x))=x & f(x^2)=2f(x) & f(1-x)+f(x)=2x \end{array}$$

Les tres primeres són en diverses variables (x, y), les tres restants en una variable (x).

2 Equació funcional de Cauchy

L'equació funcional de Cauchy és la més emblemàtica per la seva llarga història i ja que té un paper fonamental en la resolució de moltes altres equacions.

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

2.1 Resolució

- Passa 1: Agafant $x = y = 0$, obtenim $f(0) = f(0) + f(0)$, que implica $f(0) = 0$.
- Passa 2: Provarem que $f(kx) = kf(x)$ per tot $k \in \mathbb{N}$ per inducció. Per $k = 1$ és trivial. Suposem que és cer per k. Vegem-ho per $k + 1$. Agafant $y = kx$, obtenim

  $$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x)+f(kx) = f(x)+kf(x) = (k+1)f(x)$$

- Passa 3: Agafant $y = -x$, tenim

  $$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

  que implica $f(-x) = -f(x)$. Per tant, $f(-kx) = -f(kx) = -kf(x)$ per $k \in \mathbb{N}$ i així, $f(kx) = kf(x)$ per $k \in \mathbb{Z}$.
- Passa 4: Agafant $x = 1/k$, tenim

  $$f(1) = f(k\frac{1}{k}) = kf(\frac{1}{k}),$$

  que implica $f(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}f(1)$.
- Passa 5: Per $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$,

  $$f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$$

  Aleshores, $f(x) = cx$ amb $c = f(1)$ i $x \in \mathbb{Q}$.
- Comprovació: Per $f(x) = cx$,

  $$f(x + y) = c(x + y) = cx + cy = f(x) + f(y).$$

En els nombres reals aquestes funcions no tenen per què ser les úniques que verifiquen l'equació de Cauchy. Emperò, si es suposa continuïtat en un punt o monotonia, per la densitat dels racionals en els enters (tot nombre real és límit d'una successió d'enters), $f(x) = cx$ per tot $x \in \mathbb{R}$ són les úniques solucions de l'equació de Cauchy.

2.2 Equacions relacionades amb l'equació de Cauchy

1. (Equació exponencial de Cauchy) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ té solucions contínues $f(x) \equiv 0$ i $f(x) = e^{cx}$.
2. (Equació logarítmica de Cauchy) $f(x \cdot y) = f(x)+f(y)$ amb f contínua i $x, y > 0$ té solucions $f(x) = c \ln |x|$.

3. (Equació potencial de Cauchy) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ té solucions contínues $f(x) = |x|^c$, $f(x) = 0$ i $f(x) = |x|^c \cdot signe(x)$.

4. (Equació de Jensen) $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ té solucions contínues $f(x) = ax + b$.

5. (Equació D'Alembert) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ té solucions contínues $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos bx$ i $f(x) = \cosh bx$.

3 Estratègies de resolució

3.1 Consideracions prèvies

Abans de començar a resoldre l'equació funcional s'ha de tenir en compte tota la informació que s'aporta.

(i) *Domini de la funció*: El domini ens indica on està definida la funció (nombres naturals, enters, racionals, reals...). Aquest coneixement ens ajudarà a l'hora de fer substitucions o operar.

(ii) *Imatge de la funció*: Es poden donar funcions que prenen valors en el domini o en un altre conjunt.

(iii) *Condicions de la funció incògnita*: A més de l'equació, la funció a trobar pot satisfer continuïtat, monotonia, positivitat, etc.

3.2 Mètodes bàsics de resolució

A continuació, es presentaran els mètodes més usuals per resoldre equacions funcionals. Aquests mètodes són estratègies per resoldre-les, no pas una guia de tipus recepta ja que cada equació funcional és especial i particular. Sovint alguna d'aquestes estratègies no ens aportarà cap informació però una altra o la combinació d'altres donarà lloc a la solució final. S'ha de dir que la resolució d'equacions funcionals és tot un art i que una mateixa equació funcional pot ser resolta de diverses formes totalment diferents.

Observació 3. Aquestes estratègies ens donaran unes funcions candidates a ser solució. Al final, aquestes funcions s'han de substituir a l'equació i veure si la satisfan!

- **Substitució de les variables per valors numèrics.** S'ha de treure el màxim profit del coneixement de certs valors. Es sol començar per 0 o 1 o per valors rellevants del domini o per l'equació. En equacions en diverses variables es poden fer substitucions d'una variable per una funció de l'altra ($y = x$, $y = -x$, etc.).

- **Inducció.** Es basa en usar el valor $f(1)$ per trobar tots els $f(n)$ amb n enter. Després trobar els $f(\frac{1}{n})$ i $f(r)$ amb r racional. Es sol emprar per trobar funcions definides en els racionals.

Exercici 4. *Troba totes les funcions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tals que $f(1) = 2$ i $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.*

Demostració. Agafant $x = 1$ i $y = n \in \mathbb{N}$ tenim $f(n+1) = f(n) + 1$ i com $f(1) = 2$ tenim $f(n) = n + 1$ per tot natural n. Anàlogament, per $x = 0$ i $y = n$ tenim $f(0)n = f(n) - 1 = n$, és a dir, $f(0) = 1$. Volem trobar ara $f(z)$ per z enter. Substituint $x = -1$ i $y = n$ dóna $f(-n) = -f(n-1)+1 = -n+1$. Així, $f(z) = z+1$ per z enter. Ara, anem a determinar $f(\frac{1}{n})$. Agafant $x = n$ i $y = \frac{1}{n}$ tenim

$$f(1) = (n+1)f(\frac{1}{n}) - f(n + \frac{1}{n}) + 1. \tag{1}$$

A més, per $x = 1$ i $y = n + \frac{1}{n}$ tenim $f(n + 1 + \frac{1}{n}) = f(n + \frac{1}{n}) + 1$, i amb inducció es prova que $f(n + \frac{1}{n}) = n + f(\frac{1}{n})$. Substituint a (1) arribam a $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + 1$. A més, fent $x = m$ i $y = \frac{1}{n}$ obtenim $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1$ i tenim $f(r) = r + 1$ per tot racional $r > 0$. Finalment, fent $x = -1$ i $y = r$ tenim $f(-r) = -f(r-1) + 1 = -r + 1$ i així, $f(x) = x + 1$ per tot racional x. Per acabar, es comprova que aquesta funció verifica l'equació. □

- **Injectivitat o Exhaustivitat.** Una funció f és injectiva si $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Una funció $f : A \to B$ és exhaustiva si per tot $b \in B$ existeix $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Aquestes dues propietats poden resultar útils si es determina que la funció solució les verifica.

Exercici 5. *Troba totes les solucions de l'equació $f(f(x)) = 0$ on $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfà $x + f(x) = f(f(x))$ per tot $x \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Noteu que $f(f(x)) - f(x) = x$ i si $f(x) = f(y)$ llavors $x = y$, i per tant, f és injectiva. Com que $f(f(0)) = f(0) + 0 = f(0)$, per la injectivitat tenim $f(0) = 0$ i per tant $f(f(0)) = 0$. Si hi hagués un altre x tal que $f(f(x)) = 0 = f(f(0))$, la injectivitat implicaria $f(x) = f(0)$ i $x = 0$. □

- **Trobar els punts fixos o zeros de les funcions.** x_0 és un punt fix de la funció f si $f(x_0) = x_0$ (gràficament la intersecció de f amb $y = x$) i x_0 és un zero de la funció f si $f(x_0) = 0$.

Exercici 6. *Determina totes les funcions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tals que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *i per tots $x, y \in \mathbb{R}^+$,*

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

Demostració. Substituint $x = y = 1$, obtenim $f(f(1)) = f(1)$. Substituint $x = 1$ i $y = f(1)$, tenim $f(1)^2 = f(f(f(1))) = f(1)$ i aleshores $f(1) = 1$ és un punt fix. Considerem $y = x$ i obtenim que $xf(x)$ és un punt fix per tot $x \in \mathbb{R}^+$.
Suposem que $x_0 > 1$ és un punt fix, llavors $x_0 f(x_0) = x_0^2$ és també un punt fix. Aleshores x^{2^m} és un punt fix per tot natural m, contradient $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Si $x \in (0,1)$ és un punt fix, llavors

$$1 = f(\frac{1}{x}) = f(\frac{1}{x}f(x)) = xf(\frac{1}{x})$$

i per tant, $\frac{1}{x} > 1$ també és un punt fix, entrant en contradicció amb allò demostrat abans. Així, 1 és l'únic punt fix, fet que implica que $xf(x) \equiv 1$ i $f(x) = \frac{1}{x}$. □

- **Predir alguna solució.** Aquest mètode serà útil a l'hora de realitzar les substitucions per obtenir una família de funcions on la funció predita en sigui un cas particular o per demostrar que no n'hi ha més.

Exercici 7. *Trobar totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifiquen*

$$f^3(x) + (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})f(x) = 2x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{2n+1}.$$

Demostració. És senzill comprovar que $f(x) = x$ és una solució. Vegem que és única. Sigui $g(x)$ una altra solució distinta de $f(x)$. Aleshores g també verifica la condició. Restant ambdues condicions, queda

$$f^3(x) - g^3(x) + (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})(f(x) - g(x)) = 0$$

usant la diferència de cubs i factoritzant, obtenim

$$(f(x) - g(x))(f^2(x) + f(x) \cdot g(x) + g^2(x) + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}) = 0.$$

Emperò,

$$f^2(x) + f(x) \cdot g(x) + g^2(x) = (f(x) + \frac{g(x)}{2})^2 + \frac{3g^2(x)}{4}$$

i arribam a contradicció. Aleshores $f(x) = x$ és l'única solució. □

- **Usar els nombres en una base distinta a 10.** Aquest mètode només es pot emprar si el domini és $\mathbb{N}$.

Exercici 8. *Sigui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funció que satisfà*

$$f(1) = 2,\ \ f(2) = 1,\ \ f(3n) = 3f(n),\ \ f(3n+1) = 3f(n)+2,\ \ f(3n+2) = 3f(n)+1.$$

Troba el nombre d'enters $n \leq 2006$ pels quals $f(n) = 2n$.

Demostració. Usarem els nombres en base 3. Calcularem $f(n)$ per $n \leq 8$ per intentar predir la solució. És obvi que l'equació donada sols pot tenir una solució.

$$f((1)_3) = (2)_3,\ f((2)_3) = (1)_3,\ f((10)_3) = 6 = (20)_3,\ f((11)_3) = 8 = (22)_3,$$

$$f((12)_3) = 7 = (21)_3,\ f((20)_3) = 3 = (10)_3,\ f((21)_3) = 5 = (12)_3,\ f((22)_3) = 4 = (11)_3.$$

Ara es veu que $f(n)$ s'obté de n canviant cada dígit 2 per 1 i viceversa. Aquest fet es comprova ràpidament per inducció. És clar que $f(n) = 2n$ si, i només si, el nombre n en base 3 no té cap dígit 2. És fàcil doncs comptar quants n'hi ha d'aquests n's. La resposta és 127. $\square$