EXERCICIS PER PRACTICAR

1. Demostreu que si $2^n - 1$ és primer llavors n és primer. *Indicació:* $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1)$

2. Demostra que si n no és un quadrat perfecte, llavors $\sqrt{n}$ no és racional.

3. Determineu en quants zeros acaba el nombre 1000!.

   Solució: Tindrem doncs 249 zeros.

4. Demostreu que:
   a) El quadrat de qualsevol enter és de la forma 3k o 3k + 1
   b) El cub de qualsevol enter és de la forma 9k, 9k + 1 o 9k + 8.

5. a) Comprovar que $2^5 \cdot 9^2 = 2592$
   b) Estudiar si és possible que $2^5 \cdot a^b = (25ab)_{10}$, per altres valors de a i b diferents dels que apareixen a l'apartat a).

   Solució: b) No és possible.

6. Siguin a i b dos nombres naturals. Troba el nombre de múltiples de b que apareixen a la successió: a, $2a$, $3a$, ..., ba.

   Solució: la successió tindrà d múltiples de b sent d =m.c.d(a, b).

7. Sense efectuar la multiplicació, calcular la xifra a en el producte en base 10

   $$89878 \cdot 58965 = 5299a56270$$

   Solució: a = 6

8. Quants nombres compresos entre 1000 i 9999 verifiquen que la suma dels seus quatre dígits és major o igual que el producte d'aquests? Per a quins d'aquests es verifica la igualtat?

   Olimpíada 2000
   Sol:2502

9. Troba un nombre natural n que és el producte dels nombres primers p, q i r, sabent que

   $r - q = 2p$ i $rq + p^2 = 676$

   Olimpíada 2001
   Sol: 3, 23 i 29

10. Nou persones han celebrat quatre reunions diferents asseguts al voltant d'una taula circular. Han pogut fer-ho sense que existeixin dues d'aquestes persones que s'hagin assegut una al costat de l'altre en més d'una reunió?. Raona la resposta.

    Olimpíada 2001
    Sol: Sí

11. Unim $2n$ boles blanques amb $2n$ boles negres formant una cadena oberta. Demostrar que, es faci amb l'ordre que es faci, sempre és possible tallar un segment de cadena exactament amb n boles blanques i n boles negres.

    Olimpíada 2003

12. Trobau les 4 darreres xifres de 3^{2004}.

    Olimpíada 2004
    Sol: 0081

13. Trobar, raonadament, dos nombres enters positius a i b, tals que:

    b^2 sigui múltiple de a,
    a^3 sigui múltiple de b^2,
    b^4 sigui múltiple de a^3,
    a^5 sigui múltiple de b^4,
    però b^6 no sigui múltiple de a^5.

    Olimpíada 2006
    Sol: $a = 2^4$ *i* $b = 2^3$

14. En el soterrani del castell, 7 gnoms guarden un tresor. El tresor està darrera de 12 portes, cadascuna d'elles amb 12 panys. Tres gnoms qualsevol tenen conjuntament les claus per a tots els panys. Provar que entre tots els gnoms tenen almenys 336 claus.

    Olimpíada 2006

15. Els nombres naturals 22, 23 i 24 tenen la següent propietat: els exponents dels factors primers de la seva descomposició són tots senars:

$$22 = 2^1 \cdot 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \cdot 3^1$$

Quin és el major nombre de naturals consecutius que pot tenir aquesta propietat?. Raonar la resposta.

Olimpíada 2006

Sol: Es pot obtenir fins a 7 nombres consecutius (29,....,35)

16. Existeix un nombre infinit de nombres naturals que NO es pot representar en la forma $n^2 + p$, essent n natural i p primer? Raonar la resposta.

Olimpíada 2006

Sol: Sí.

17. Donat un enter $k \geq 1$, definim a_k com el nombre sencer que en base deu s'escriu

$$a_k = \overbrace{11...1}^{k}$$

(es a dir, un 1 repetit k vegades). Demostrar que a_k divideix a a_l si i només k divideix a l.

Olimpíada 2007

18. Trobar totes les solucions senceres possibles, x i y, de l'equació:

$$p(x + y) = xy$$

essent p un cert nombre primer.

Olimpíada 2007

Solucions: $x=0$ i $y = 0$;

$x = (1 - p)p$ i $y = p - 1$;

$x=2p$ i $y=2p$;

$x = p(1+p)$ i $y = p+1$

19. Sigui m un enter positiu. Demostra que no existeixen nombres primers de la forma $2^{5m} + 2^m + 1$.

Olimpíada 2008

20. Es consideren 17 enters positius tals que cap d'ells té un factor primer major que 7. Demostra que, almenys, el producte de dos d'aquests nombres és un quadrat perfecte.

Olimpíada 2008

21. La igualtat 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 és un exemple de descomposició del nombre 2008 com a suma de nombres diferents de més d'una xifra, que la seva representació (en el sistema decimal) utilitza un sol dígit.

a) Trobar una descomposició d'aquest tipus pel nombre 2009.

b) Determinar pel nombre 2009 totes les possibles descomposicions d'aquest tipus que utilitzen el menor nombre possible de sumands (l'ordre dels sumands no se té en compte).

Olimpíada 2008

Solució : No és possible trobar una solució amb menys de 4 sumands. Les solucions amb 4 sumands són:

2009 = 1111 + 777 + 66 + 55; 2009 = 1111 + 777 + 99 + 22; 2009= 1111 + 777 + 88 + 33;

2009 = 1111 + 777 + 77 + 44; 2009 = 999 + 888 + 111 + 11; 2009 = 999 + 777 + 222 + 11;

2009= 999 + 666+ 333 + 11; 2009= 999 + 555+ 444 + 11; 2009 = 888 + 777 + 333 + 11;

2009 = 888 + 777 + 333 + 11; 2009 = 888 + 666 + 444 + 11; 2009 = 777 + 666 + 555 + 11;

2009 = 777 + 666 + 555 + 11

22. Trobar els valors de n (enter positiu) pels que $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ és un quadrat perfecte.

Solució: $n = 12$

23. La suma d'un cert nombre d'enters consecutiu val 1000. Troba aquests enters.

Sol: Hi ha 3 solucions possibles

198, 199, 200, 201, 202

28, 29, 30, ..., 52

8, 9, 10, ..., 132

24. Trobar dues xifres diferents entre sí A i B tal que el nombre de la forma BABABA sigui múltiple de AAA, de BBB i de AB, però BA no sigui múltiple de B.

Solució: A=2 i B=7

25. Demostrar que $n^4 + 4$, (essent n natural) només és primer per n = 1.

26. Demostrar: $\forall$ n, k $\in$ **N** amb $k \leq n \Rightarrow (n+1)\cdot(n+2)..........(2n-1)\cdot(2n)$ és múltiple de 2^k

27. Trobar tres nombres naturals en progressió aritmètica de diferència 2, tals que la suma dels seus quadrats sigui un nombre de 4 xifres iguals.

Solució: 41, 43 i 45.

28. Trobar un nombre de 4 xifres de la forma aabb que sigui quadrat perfecte.

Solució: 7744

29. Trobeu el mínim nombre natural n que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n + 1$ és múltiple de 5, $n + 2$ és múltiple de 7, $n + 3$ és múltiple de 9 i $n + 4$ és múltiple de 11.

Olimpíada 2001.
Solució: n = 1734

30. Trobeu tots els nombres enters m, n, solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$.

Olimpíada 2004.
Solució: m = 0 i n = 0

31. Demostrar que la darrera xifra decimal de $2^{2^n} + 1$, és 7 per tot nombre natural n major o igual que 2.

32. Calcula el residu de la divisió del producte $2^{50}\cdot 41^{65}$ entre 7.

Solució: 3

33. Demostra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es múltiple de 7.

Olimpíada 2008

34. Determinar x, y, z en el nombre $33xy49z$ per a que sigui múltiple de 693.

Sol: x = 4, y = 6 i z = 7

35. Demostra que la suma de cubs de tres nombres naturals consecutius és múltiple de 9.

36. Demostrar que per a tot nombre n natural es verifica: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 0 \pmod{11}$

37. Expressar l'invers de 3 en el cos Z/(p), essent p primer, en funció de p.

Solució: Si p és de la forma 3k + 1 per algun nombre enter k, llavors $p^{-1} = \dfrac{2p+1}{3}$ *(mod p).*

Si p és de la forma 3k + 2 per algun nombre enter k, llavors $p^{-1} = \dfrac{p+1}{3}$ *(mod p)*

38. Demostrar que si a és natural no nul a^4 s'escriu en base 5 amb xifres que acaben en un o en quatre zeros.

39. Trobar tots els nombres naturals n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7. Demostrar que no hi ha cap natural p tal que $2^p + 1$ és divisible per 7.

Solució: $2^n - 1$ serà divisible per 7 sempre que n sigui múltiple de 3.

40. Demostrar que per tot n enter positiu, el nombre $3^n - 2n^2 - 1$ és múltiple de 8. Provar a més que, si n no és múltiple de 3, llavors $3^n - 2n^2 - 1$ és múltiple de 24.

41. Provar que si x, y són nombres enters i 3 divideix a $x^2 + y^2$, llavors 3 divideix a x i també 3 divideix a y

42. Demostrar que per a tot nombre primer p diferent de 2 i 5, existeixen infinits múltiples de p de la forma 111...1 (escrits només amb uns)

43. La successió de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es defineix com: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ per n>2. Provar que 9 divideix a una infinitat de termes de la successió de Fibonacci.

44. Sigui a_n el dígit de les unitats de $1997 + 1997^3 + 1997^5 + \ldots 1997^{2n-1}$. Calcular la suma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1997}$$