Problema 6

(i) Provau que la xifra de les unitats i la de les desenes dels nombres quadrats perfectes acabats en 1, 5, 6 o 9 tenen paritat diferent.

(ii) Trobau tots els nombres quadrats perfectes acabats en tres xifres iguals (diferents de zero).

(iii) Provau que no hi ha cap quadrat perfecte acabat en quatre xifres iguals (diferents de zero).

Solució.

(i) La prova és immediata a partir del desenvolupament de $(10m+t)^2$, on m és un nombre natural i $t \in \{1,3,4,5,6,7,9\}$.

(ii) PROVA 1. En virtut de l'apartat anterior, la qüestió proposada es redueix a trobar totes les solucions en nombres naturals de l'equació de segon grau

$$x^2 = 1000y + 444. \tag{1}$$

Fem el canvi de variable $y = z + 1$. Tindrem

$$x^2 = 1000z + 1444.$$

Observant que $1444 = 38^2$ obtindrem l'equació següent, equivalent:

$$(x-38)(x+38) = 1000z. \tag{2}$$

Els factors del primer membre són nombres parells (tenen la mateixa paritat i el seu producte és parell). En conseqüència, x és parell. Per tant,

$$x = 2x',$$

on x' és un nombre natural.

Si substituïm x per $2x'$ a l'equació (2) i dividim després tota l'equació per 4, ens quedará

$$(x'-19)(x'+19) = 250z. \tag{3}$$

Com que els factors $x'-19$, $x'+19$ tenen la mateixa paritat i la seva diferència és 38, un nombre no divisible per 5, resulta que cada un d'ells és un múltiple de 2 i que l'un o l'altre és un múltiple de 125. Tenint això present, les solucions de (3) s'obtenen igualant $x' - 19$ o $x' + 19$ a un múltiple de 250, el mínim comú múltiple de 2 i 125.

És a dir:

$$x' = 250n \pm 19, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i

$$x = 500n \pm 38, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Així, doncs, els quadrats que ens demanen són els dels nombres d'una de les formes $x = 500n \pm 38$, o dels nombres acabats en 038, 462, 538, 962.

PROVA 2. Substituint a (1) x per $2x'$ obtindrem:

$$4x'^2 = 1000z + 444,$$

igualtat que dividida per 4 s'escriu:

$$x'^2 = 250z + 111 = (25z + 11) \cdot 10 + 1. \tag{4}$$

En virtud de l'apartat (i), el factor $25z + 11$ ha de ser parell i, per tant, z és un nombre senar.

Substituint $z = 2t + 1$ a l'equació (4) s'obté

$$(x' - 19)\,(x' + 19) = 500t$$

i acabam com a la prova anterior.

(iii) PROVA 1. Com que

$$x^2 = (500n \pm 38)^2 = 250000n^2 \pm 38000n + 1444,$$

la xifra de les unitats de milers de x^2 és imparell. Per tant, no existeix cap quadrat perfecte acabat en quatre xifres iguals (diferents de zero).

PROVA 2. Fem la demostració per reducció a l'absurd, que consisteix a suposar que existeix un nombre natural el quadrat del qual acaba en quatre xifres totes elles iguals a 4.

Sigui x un tal nombre. Aleshores, x és parell i es pot expressar com $x = 2y$, on y és un nombre natural.

D'altra banda, per la hipòtesi, x^2 es pot escriure en la forma $10000k + 4444$, $k \in \mathbb{N}$. Per tant,

$$4y^2 = x^2 = 4\,(2500 + 1111)\,,$$

d'on deduïm que les dues darreres xifres (la de les unitats i la de les desenes) de y^2 són ambdues iguals a 1.

En conseqüència, la xifra de les unitats de y és o bé 1 o bé 9.

Ara bé, de les dues multiplicacions següents

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & \cdots & \cdots & n & 1 \\
\times & \cdots & \cdots & \cdots & n & 1 \\
\hline
 & \cdots & \cdots & \cdots & n & 1 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & n & \\
\hline
 & \cdots & \cdots & \cdots & p & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & \cdots & \cdots & \cdots & m & 9 \\
\times & \cdots & \cdots & \cdots & m & 9 \\
\hline
 & \cdots & \cdots & \cdots & u & 1 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & v & \\
\hline
 & \cdots & \cdots & \cdots & q & 1
\end{array}
$$

se'n dedueix que p i q són nombres parells perquè p és la xifra de les unitats de $2n$, u és la xifra de les unitats de $v + 8$ i q és la xifra de les unitats de $2v + 8$. Així, doncs, la xifra de les desenes de y^2 és parell: no pot ser igual a 1 i s'arriba a la contradicció desitjada.