Problema 6

Resoleu l'equació

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x-6}+\frac{7}{x-7}=x^2-4x-4$$

Solució. L'equació donada es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$\left(\frac{1}{x-1}+1\right)+\left(\frac{2}{x-2}+1\right)+\left(\frac{6}{x-6}+1\right)+\left(\frac{7}{x-7}+1\right)=x^2-4x,$$

això és,

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-6}+\frac{x}{x-7}=x^2-4x. \qquad (1)$$

Atès que x és un factor comú en els dos membres, $x=0$ és una solució. Suposem ara $x\neq 0$ i dividim (1) per x. Quedarà

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-7}=x-4$$

o, equivalentment,

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-7}\right)+\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-6}\right)=x-4.$$

És a dir:

$$\frac{2x-8}{(x-1)\,(x-7)}+\frac{2x-8}{(x-2)\,(x-6)}=x-4,$$

o sigui,

$$\frac{2x-8}{x^2-8x+7}+\frac{2x-8}{x^2-8x+12}=x-4.$$

El fet que $x=4$ anul·la els dos membres ens revela que $x=4$ és una solució. Si suposam $x\neq 4$ i dividim per $x-4$, aquesta equació esdevé

$$\frac{2}{x^2-8x+7}+\frac{2}{x^2-8x+12}=1.$$

Designem x^2-8x per t. Amb aquesta notació l'equació anterior s'escriu

$$\frac{2}{t+7}+\frac{2}{t+12}=1,$$

que es resol d'una manera immediata i dóna $t=\frac{-15\pm\sqrt{41}}{2}$.

Com que $x^2-8x=t$, tenim

$$x^2-8x=\frac{-15\pm\sqrt{41}}{2}.$$

Sumem-hi 16 als dos membres. Es té

$$(x-4)^2 = \frac{17 \pm \sqrt{41}}{2},$$

d'on deduïm que

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{41}}{2}}.$$

Podem, doncs, concloure que les solucions volgudes són

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 4 \quad \text{o} \quad x = 4 \pm \sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{41}}{2}},$$

amb les quatre combinacions possibles de signes.