Problema 5

Demostrau que si m, n, r són nombres enters positius qualssevol, aleshores el nombre

$$81m \cdot 3^{8r} + 8n \cdot 2^{6r}$$

és divisible per 89 si, i només si, la diferència $m - n$ és un múltiple de 89.

PROVA. Partim de les identitats

$$81m \cdot 3^{8r} + 8n \cdot 2^{6r} = 81m \cdot \left(3^4\right)^{2r} + 8n \cdot \left(2^3\right)^{2r} = 81m \cdot 81^{2r} + 8n \cdot 8^{2r} = 81^{2r+1}m + 8^{2r+1}n$$

i sumem-hi i restem-hi al membre de la dreta de l'expressió anterior el terme $81^{2r+1}n$. Tindrem,

$$81m \cdot 3^{8r} + 8n \cdot 2^{6r} = 81^{2r+1}\left(m - n\right) + \left(81^{2r+1} + 8^{2r+1}\right)n \qquad (1)$$

De la identitat $A^{2r+1} + B^{2r+1} = (A + B)\left(A^{2r} - A^{2r-1}B + \ldots + B^{2r}\right)$, aplicada amb $A = 81$ i $B = 8$, se'n dedueix que $81^{2r+1} + 8^{2r+1}$ és un múltiple de 89.

D'això, tenint present (1), es desprèn que les afirmacions "$81m \cdot 3^{8r} + 8n \cdot 2^{6r}$ és divisible per 89" i "$81^{2r+1}(m - n)$ és divisible per 89" són equivalents.

Ara bé, els nombres 81 i 89 són primers entre ells. En conseqüència, 81^{2r+1} i 89 són primers entre ells.

Per tant, pel teorema fonamental de l'aritmètica[1], si $89 \mid 81^{2r+1}(m - n)$, serà $89 \mid (m - n)$, precisament allò que volíem demostrar.

---

[1] Teorema. El producte de dos nombres naturals és igual al producte del seu màxim comú divisor i del seu mínim comú múltiple. Siguin a i b nombres enters positius i designem per M el seu mínim comú múltiple (per definició, M és el nombre natural més petit que és múltiple comú de a i b). Atès que ab és múltiple de a i b, serà $M \mid ab$ (demostrau-ho). És a dir, $ab = MD$, on D és un nombre natural. I atès que M és un múltiple comú de a i b, $M = ka = lb$, on k i l són nombres naturals. Així, doncs, $ab = MD = kaD = lbD$ i, per tant, $a = lD$ i $b = kD$. Això ens revela que D és un divisor comú de a i b. D'altra banda, sigui d un divisor comú arbitrari de a i b. Tindrem $a = da_1$ i $b = db_1$, on a_1 i b_1 són nombres naturals. Com a conseqüència, el nombre da_1b_1 és un múltiple comú de a i b i, per tant, $M \mid da_1b_1$. És a dir, $da_1b_1 = Mt$, on t és un nombre natural. Però $MD = ab = d^2a_1b_1$, de manera que tenim $dMt = MD$. Dividint per M, es té $dt = D$ i $d \mid D$. Així, doncs, el nombre natural D és un divisor comú dels nombres a i b i, a més, cada divisor comú d'aquests nombres divideix D. Per tant, D és el màxim comú divisor de a i b, la qual cosa, tenint present que $ab = MD$, és precisament allò que volíem demostrar.

En particular, el mínim comú múltiple de dos nombres primers entre ells és igual al seu producte.

Teorema fonamental de l'aritmètica. Si un nombre natural divideix el producte de dos nombres naturals i és primer amb un d'ells, és un divisor de l'altre. Siguin a i b dos nombres naturals primers entre ells i c un nombre natural tal que $b \mid ac$. Atès que ac és múltiple comú de a i b, serà múltiple del seu mínim comú múltiple que, pel que hem vist, és ab. Així, doncs, $ac = tab$, on t és un nombre natural. Aquesta igualtat, dividida per a, esdevé $c = tb$. Això és, $b \mid c$, tal com volíem.