Problema 4

En un triangle ABC els angles $\angle ABC$ i $\angle BCA$ són aguts. Sigui D el peu de la perpendicular per A al costat BC.

Demostrau que les condicions següents són equivalents:

1. El triangle ABC és rectangle.
2. La suma dels radis de les circumferències inscrites en els triangles ABD, ADC i ABC és igual a la longitud del segment AD.

Solució.

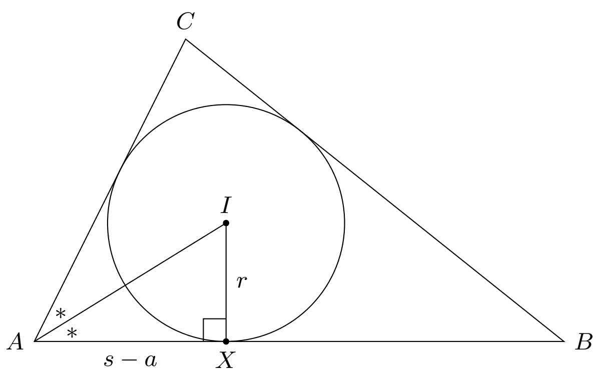
Posarem a, b, c per indicar les longituds dels costats del triangle ABC. El semiperímetre serà s. Amb r indiquem el radi de la circumferència inscrita.

Amb relació amb els triangles rectangles, la proposició següent resulta útil:

PROPOSICIÓ. Es compleix:

$$r = s - a$$

si, i només si, el triangle ABC és rectangle en A.



La demostració de la proposició és elemental a partir de la fórmula següent, que determina la longitud del segment de tangent des de A a la circumferència inscrita en $\triangle ABC$:

$$AX = s - a,$$

on X denota, per a fixar les idees, el punt de tangència del costat AB (vegeu la figura anterior).

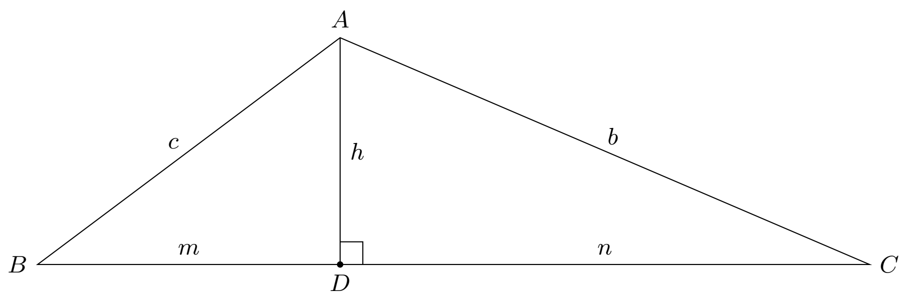
Fixem-nos que si I designa l'incentre de $\triangle ABC$, llavors el triangle AXI, en el qual $IX = r$, és rectangle en X i, per tant,

$$r = s - a \Leftrightarrow IX = AX \Leftrightarrow \angle IAX = 45^\circ \Leftrightarrow \angle CAB = 2 \cdot \angle IAX = 90^\circ.$$

Si designem ara per h, m, n les respectives longituds dels segments AD, BD, DC, i designem per r_1, r_2 els respectius radis de les circumferències inscrites en els triangles *rectangles* ABD,

ADC, aplicant a aquests triangles la fórmula de la proposició anterior es té (vegeu la figura següent)

$$r_1 = \frac{m+h-c}{2}, \qquad r_2 = \frac{h+n-b}{2} \tag{1}$$



D'altra banda, l'àrea de $\triangle ABC$ és rs i també $\frac{1}{2}ah$. Per tant,

$$rs = \frac{1}{2}ah. \tag{2}$$

Atès que els angles B i C de $\triangle ABC$ són aguts, el punt D és interior al segment BC (demostreu-ho!) i, per tant, serà $a = m+n$ i $s = \frac{m+n+b+c}{2}$. Substituïm això a (2) i aïllem r,

$$r = \frac{(m+n)\,h}{m+n+b+c}. \tag{3}$$

Així, doncs, tenint present (1) i (3), la igualtat

$$r_1 + r_2 + r = \overline{AD}$$

es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$\frac{m+h-c}{2} + \frac{m+n+b+c}{2} + \frac{(m+n)\,h}{m+n+b+c} = h.$$

Si passam el terme $\frac{(m+n)h}{m+n+b+c}$ al segon membre de la igualtat anterior i operam, i multiplicam després tota la igualtat per $2\,(m+n+b+c)$, ens quedarà:

$$(m+n)^2 - (b+c)^2 + 2\,(m+n)\,h = 0$$

Com que, pel que hem vist, $m+n=a$, aquesta igualtat esdevé

$$2ah = (b+c)^2 - a^2.$$

Com que $ah = 2rs$ i $(b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)\,(b+c-a) = 2s \cdot 2\,(s-a) = 4s\,(s-a)$, resulta la igualtat següent, equivalent, i més senzilla:

$$r = s - a,$$

igualtat que equival a la condició que $\triangle ABC$ és rectangle en A, com es volia.