Problema 4

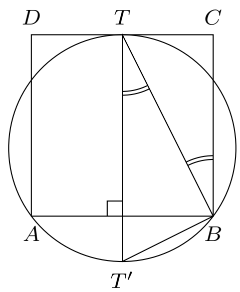
Construiu un quadrat de manera que tengui dos vèrtexs consecutius sobre una circumferència donada, i de manera que sigui tangent a la mateixa el costat que uneix els altres vèrtexs.

Si la circumferència té radi unitat, calculau la longitud del quadrat construït.

Donarem dos procediments.

Primer procediment.

Anàlisi. Siguin A, B els vèrtexs del quadrat $ABCD$ demanat que es troben sobre la circumferència donada. Sigui T el punt de tangència del costat CD i T' el punt diametralment oposat a T.



Com que TT' és perpendicular a CD i CD és paral·lel a AB, TT' és perpendicular a AB. D'això se segueix que el diàmetre TT' és mediatriu de la corda AB, d'on deduïm que T és el punt mitjà del costat CD, atès que els segments de paral·leles compresos entre rectes paral·leles són iguals.

És a dir:

$$CT = \frac{1}{2}CD \tag{1}$$

D'altra banda, els triangles TBT' i BCT són semblants, ja que són rectangles (a B i C, respectivament) i tenen iguals un angle agut. (En efecte, com que $TT' \parallel BC$, $\angle BTT' = \angle CBT$).

Així, doncs,

$$\frac{BT}{BT'} = \frac{BC}{CT}$$

Tenint en compte que $BC = CD$, es té $\frac{BT}{BT'} = \frac{CD}{CT}$. Substituint aquí el valor de $\frac{CD}{CT}$ deduït de (1), s'obté

$$\frac{BT}{BT'} = 2. \tag{2}$$

Construcció. Sobre la recta que uneix els extrems U i V d'un diàmetre de Ω, determinem [1] els punts X, Y tals que

$$\frac{UX}{XV} = \frac{UY}{YV} = 2.$$

La circumferència de diàmetre XY, anomenada *circumferència d'Apol·loni* , talla la circumferència donada en els punts que són vèrtexs consecutius del quadrat volgut, la construcció del qual, ara, es pot completar per procediments estàndards.

Segon procediment.

Anàlisi. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle BTT', en el qual, tal com hem assenyalat abans, $BT = 2 \cdot BT'$, s'obté

$$5 \cdot BT'^2 = TT'^2$$

i aplicant-li el teorema del catet,

$$BT'^2 = TT' \cdot PT',$$

on P és el peu de l'altura del vèrtex B.

Com a conseqüència,

$$PT' = \frac{1}{5} TT'$$

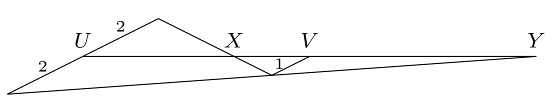
Construcció. Sigui P el punt [2] del segment UV tal que $\frac{PV}{UV} = \frac{1}{5}$. Aleshores, la perpendicular per P a UV talla la circumferència donada en els punts que són vèrtexs consecutius del quadrat desitjat, la construcció del qual, ara, és immediata.

Discussió. El problema té solució sempre.

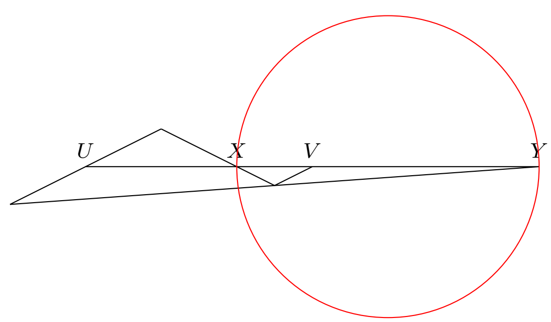
Sigui r el radi de la circumferència donada i denotem per x la longitud del segment CT. Aleshores, $BC = 2x$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle BCT, obtenim

$$BT = x\sqrt{5}.$$

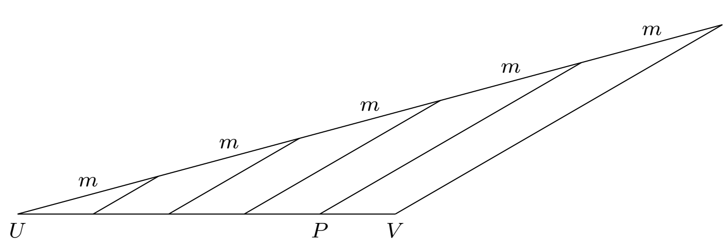
1



$UX : XV = UY : YV = 2 : 1$



2



$PV : UV = 1 : 5$

Substituint aquest valor a (2) s'obté $BT' = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Apliquem ara el mateix teorema al triangle TBT'. Tenint present que $TT' = 2r$, podem aïllar x i ens queda

$$x = \frac{4r}{5}.$$

Per tant, la longitud del costat del quadrat és $\frac{8r}{5}$. En el cas que $r = 1$, això dóna $\frac{8}{5}$.