Problema 3

A un poblet del sud dels Estats Units, hi havia famílies negres i famílies blanques. Per Nadal, les unes i les altres tenien per costum felicitar-se mútuament, per correu, però mai les famílies negres felicitaven les blanques, ni a l'inrevés. Una riuada inundà la central de correus i esborrà les adreces. El carter, home pràctic, sabent que totes les felicitacions eren iguals i que totes les famílies havien complert la tradició, envià a cada família 112 felicitacions.

Quin era el nombre de famílies negres i el nombre de famílies blanques, sabent que era més gran el nombre de les blanques?

Solució. Designarem per x el nombre de famílies blanques i per y el nombre de famílies negres.

Atès que $x\,(x-1)$ és el nombre de felicitacions enviades per les famílies blanques, $y\,(y-1)$ el nombre de felicitacions enviades per les famílies negres i $112\,(x+y)$ el nombre de felicitacions que ha repartit el carter, es compleix que

$$x\,(x-1)+y\,(y-1)=112\,(x+y)\,. \tag{1}$$

Aquesta equació, escrita com una quadràtica en y, esdevé

$$y^2-113y+x\,(x-113)=0.$$

Com que cercam les solucions en nombres enters més grans que 0, imposam la condició que el seu discriminant sigui un nombre quadrat perfecte.

És a dir:

$$12769+452x-4x^2=n^2, \tag{2}$$

on n és un nombre enter positiu.

Apliquem ara el mateix raonament a aquesta quadràtica en x. El seu discriminant és $16\left(25538-n^2\right)$ i ha de ser quadrat perfecte, com abans. És clar que això equival a afirmar que el nombre

$$N=25538-n^2$$

ha de ser quadrat d'un nombre enter.

És fàcil comprovar que el quadrat d'un nombre natural és congru amb 0 o 1 segons el mòdul 4. D'això se segueix que el nombre N, definit abans, és congru amb 1 (si n és senar) o 2 (si n és parell) segons el mòdul 4, atés que $25538 \equiv 2$ (mod. 4). Per tant, si N és un nombre quadrat perfecte, llavors n és senar. Si suposam que n és senar, es complirà que la xifra de les unitats de n^2 és 1, 5 o 9.

Si resulta que n^2 acaba en 1, llavors N acaba en 7 i no és quadrat d'un nombre enter. Si resulta que n^2 acaba en 5, llavors N acaba en 3 i tampoc és quadrat d'un nombre enter. Si resulta que n^2 acaba en 9, llavors

$$\begin{aligned} n \;\in\; &\{3,7,13,17,23,27,33,37,43,47,53,57,63,67,73,77,83,87,93,\\ &97,103,107,113,117,123,127,133,137,143,147,153,157\} \end{aligned}$$

Un càlcul directe mostra que els valors de n que convenen són 97, 113 i 127.

Si substituïm $n = 97$ a (2) s'obté $x = 120$ com a única solució admissible. Substituint aquest valor de x a (1), obtenim $y = 105$ i $y = 8$

Repetint ara per a $n = 113$ i $n = 127$ el que acabam de fer per a $n = 97$, tindrem:

$$\begin{array}{rcl} (x, y) & = & (113, 113) \\ (x, y) & = & (8, 120), (105, 120) \end{array}$$

Podem, doncs, concloure que les solucions en nombres naturals de (1) són

$$(x, y) = (8, 120), (105, 120), (113, 113), (120, 8), (120, 105)$$

D'acord amb la hipòtesi, la solució del problema és

$$(x, y) = (120, 8), (120, 105)$$