Problema 2

En una pissarra, s'escriuen tots els nombres naturals des de 1 fins n. Quan esborrem un d'ells, la mitjana aritmètica dels $n-1$ nombres restants és igual a $46\frac{20}{23}$.

Determineu el valor de n i digueu quin és el nombre esborrat.

Solució.

Designem per m el nombre esborrat. Tindrem,

$$1 \leq m \leq n \tag{1}$$

i

$$\frac{(1+2+\cdots+n)-m}{n-1} = 46\frac{20}{23}.$$

Substituint $1+2+\cdots+n$ per $\frac{(1+n)n}{2}$, aquesta igualtat s'escriu

$$\frac{\frac{(1+n)n}{2}-m}{n-1} = 46\frac{20}{23} \tag{2}$$

i, tenint en compte (1), es té:

$$\frac{\frac{(1+n)n}{2}-n}{n-1} \leq \frac{\frac{(1+n)n}{2}-m}{n-1} \leq \frac{\frac{(1+n)n}{2}-1}{n-1}.$$

Substituint aquí el valor de $\frac{\frac{(1+n)n}{2}-m}{n-1}$, s'obté

$$\frac{\frac{(1+n)n}{2}-n}{n-1} \leq 46\frac{20}{23} \leq \frac{\frac{(1+n)n}{2}-1}{n-1}.$$

És a dir:

$$91\frac{17}{23} \leq n \leq 93\frac{17}{23}.$$

Com que n és un nombre natural, resulta:

$$n \in \{92, 93\}.$$

Fent a (2) $n=92$, podem aïllar m i ens queda $m = 12\frac{20}{23}$, no admissible. Substituint $n=93$ s'obté $m=59$.

Podem, doncs, concloure que $n=93$ i que s'ha esborrat el nombre 59.