Problema 1

Siguin a, b, c nombres reals, $a \neq b$, que compleixen les relacions

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2019.$$

Calculau el valor de $c^2(a+b)$.

Solució.
Considerem la identitat

$$a^2(b+c) - b^2(c+a) = (a-b)(ab+bc+ca) \tag{1}$$

la validesa de la qual es pot provar d'una manera immediata. Usant la hipòtesi $a^2(b+c) = b^2(c+a)$, el membre de l'esquerra de (1) és òbviament nul. En conseqüència,

$$(a-b)(ab+bc+ca) = 0.$$

Com que suposam $a \neq b$, serà $a - b \neq 0$. Per tant, amb aquesta hipòtesi, de la darrera igualtat es dedueix

$$ab+bc+ca = 0.$$

Substitutint aquest valor a la igualtat següent (deduïda de (1) per permutació circular):

$$b^2(c+a) - c^2(a+b) = (b-c)(ab+bc+ca),$$

s'obté

$$b^2(c+a) - c^2(a+b) = 0.$$

És a dir:

$$b^2(c+a) = c^2(a+b).$$

En el nostre cas, podem, doncs, concloure que $c^2(a+b) = 2019$.