



60 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Primera Sessió

Solucions a càrrec de *Joan Carles Pons* i *Miquel Amengual Covas*



Problema 1. Sigui p un nombre primer senar i k un enter positiu tal que $\sqrt{k^2 - pk}$ és també un enter positiu. Trobeu k en funció de p .

Solució.

Sigui $n = \sqrt{k^2 - pk}$ amb n enter positiu. Llavors, prenent quadrats, $k^2 - pk - n^2 = 0$, d'on s'obté

$$k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \quad (1)$$

Com k és enter (positiu), $p^2 + 4n^2$ ha de ser un quadrat perfecte. Llavors diguem $m^2 = p^2 + 4n^2$ amb m enter positiu, d'on s'obté $p^2 = (m - 2n)(m + 2n)$. Com p és primer i $m - 2n < m + 2n$, només pot ser $m - 2n = 1$, i $m + 2n = p^2$. Resolent l'equació obtenim $m = \frac{p^2+1}{2}$ i $n = \frac{p^2-1}{4}$.

Si substituïm en (1) s'obté $k = \frac{p \pm m}{2} = \frac{2p \pm (p^2+1)}{4}$, d'on (descartant la solució amb el $-$) podem concloure que

$$k = \frac{(p+1)^2}{4}.$$

Problema 2. Trobeu totes les ternes (x, y, z) de nombres reals positius que satisfan el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + \sqrt{y + 11} = \sqrt{y + 76} \\ y + \sqrt{z + 11} = \sqrt{z + 76} \\ z + \sqrt{x + 11} = \sqrt{x + 76} \end{cases}$$

Solució.

De la primera equació s'obtenen les identitats

$$x = \sqrt{y + 76} - \sqrt{y + 11}$$

i

$$x(\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}) = 65,$$

d'on podem deduir que

$$x = \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}}.$$

De manera semblant s'obté

$$y = \frac{65}{\sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}},$$

i

$$z = \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}}.$$

Suposem ara que $x \leq y \leq z$ (partint d'una altra ordenació d'aquestes arbitràriem a la mateixa conclusió). Llavors com la funció $\sqrt{t}$ és creixent, es té que

$$\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11} \leq \sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11} \leq \sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}.$$

Per tant

$$\frac{65}{\sqrt{z + 76} + \sqrt{z + 11}} \leq \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}} \leq \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}},$$

llavors

$$y \leq x \leq z.$$

Ara com $x \leq y \leq z$ i $y \leq x \leq z$, es dedueix que $x = y$. Llavors

$$x = \frac{65}{\sqrt{y + 76} + \sqrt{y + 11}} = \frac{65}{\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}} = z.$$

Per tant, es té $x = y = z$.

En particular, com $x = y$, podem escriure

$$x(\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}) = 65 \tag{2}$$

Com la funció $\sqrt{x + 76} + \sqrt{x + 11}$ és estrictament creixent per reals positius x , l'equació (2) té com a molt una solució. Com $x = 5$ és solució, només la terna $(5, 5, 5)$ satisfà el sistema d'equacions de l'enunciat.

Problema 3. Sobre els costats AB i CA d'un triangle rectangle ABC , amb l'angle recte en A , es construeixen, al seu exterior, quadrats $ABFG$ i $ACKH$. Si CF i BK intersequen AB i AC en els punts L i M , respectivament, proveu que AL és igual a AM .

Solució.

PRIMERA SOLUCIÓ.

Posem a, b, c per indicar les longituds dels costats del triangle donat oposats a A, B, C .

Posem $\overline{AL} = x$ i $\overline{AM} = y$. Aleshores, $\overline{LB} = c - x$ i $\overline{MC} = b - y$.

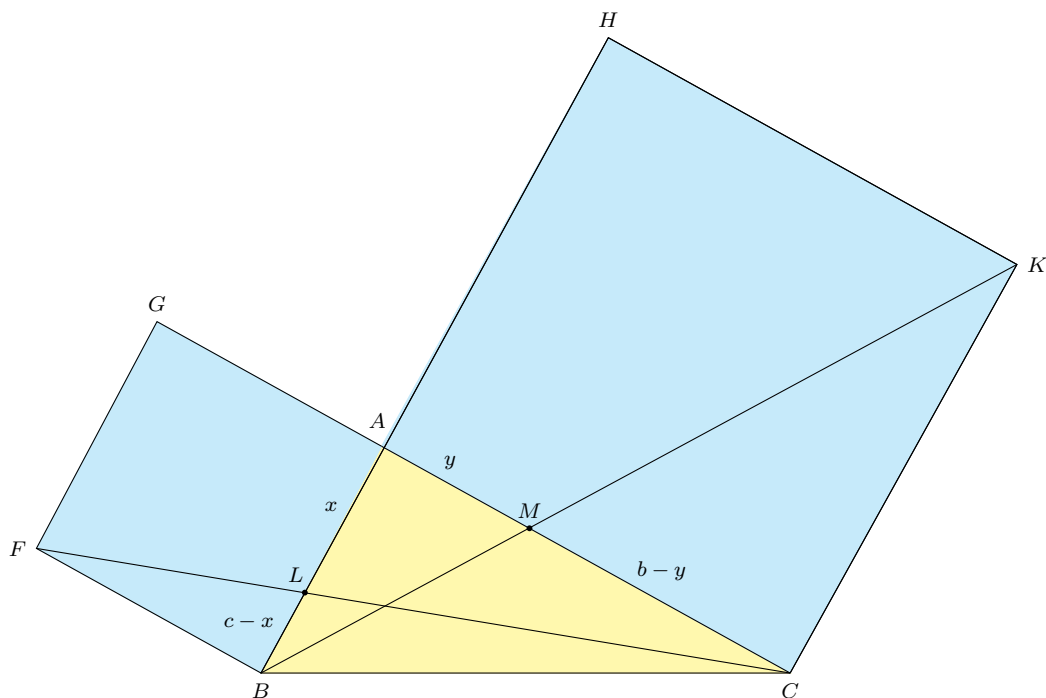
Els triangles rectangles FBL i LAC són semblants, com també ho són semblants els KCM i BAM .

En conseqüència,

$$\frac{x}{c-x} = (\triangle FBL \simeq \triangle LAC) = \frac{b}{c} = (\triangle KCM \simeq \triangle BAM) = \frac{b-y}{y},$$

d'on deduïm que

$$x = y \left(= \frac{bc}{b+c} \right).$$



SEGONA SOLUCIÓ.

El triangles BMA i BKH són semblants, com també ho són semblants $\triangle CAL$ i $\triangle CGF$.

En conseqüència,

$$\frac{AM}{KH} = \frac{AB}{HB} \qquad \frac{AL}{FG} = \frac{CA}{CG}.$$

Dividint aquestes igualtats s'obté

$$\frac{AM}{AL} \cdot \frac{FG}{KH} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{CG}{HB}.$$

D'aquí aïllem $\frac{AM}{AL}$,

$$\frac{AM}{AL} = \frac{AB}{FG} \cdot \frac{KH}{CA} \cdot \frac{CG}{HB}.$$

Atès que $AB = FG$, $KH = CA$ i $CG = (CA + AG = HA + AB) = HB$, resulta $\frac{AM}{AL} = 1$ i, per tant,

$$AM = AL,$$

com es volia.