



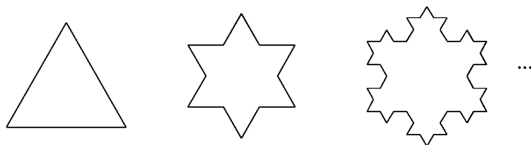
60 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió



Problema 4. Considerem una successió de corbes $P_0, P_1, P_2, \dots$. En la figura de sota teniu representades les tres primeres corbes de la seqüència: P_0 a l'esquerra, P_1 al centre, i P_2 a la dreta. Suposem que la regió tancada per la corba P_0 té àrea 1, i que P_0 és un triangle equilàter. Per a tot $k \geq 0$, s'obté P_{k+1} a partir de P_k procedint com indiquem a continuació: primer trisequem cada costat de P_k ; després, sobre cada costat de P_k , construïm un triangle equilàter exteriorment de manera que un dels seus costats coincideixi amb el segment central obtingut per la trisecció; finalment, eliminem aquest segment central.

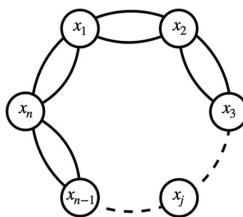


Diguem C_n el nombre de costats de la corba P_n , i diguem A_n l'àrea de la regió tancada delimitada per la corba P_n . Noteu que $C_0 = 3$ i $A_0 = 1$.

- (i) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui C_n en termes de n .
- (ii) Trobeu, per a tot $n \geq 0$, una expressió que descrigui A_n en termes de n .

Nota. Cal provar que les expressions obtingudes són correctes.

Problema 5. Sigui n un nombre natural major que 2. Suposem que hi ha n illes $x_1, \dots, x_n$ ubicades sobre un cercle, i que entre cada dues illes veïnes, hi ha dos ponts com es mostra en la figura.



Començant per l'illa x_1 , de quantes maneres es poden recórrer els $2n$ ponts passant per cada un d'ells exactament una vegada?

Problema 6. Resoleu ambdós apartats.

- (i) Prova que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 7$ que són múltiples de 37.
- (ii) Prova que hi ha infinits nombres naturals de la forma $\underbrace{3333333 \dots 3}_{\text{tots tresos}} 1$ que són múltiples de 31.