59 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Segona Sessió

Problema 4. Trobar totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

Problema 5. $2n$ estudiants (amb $n \geq 5$) participen en un torneig de tenis de taula, que té una durada de 4 dies. Cada dia, cada estudiant, juga un partit. En cada partit hi ha un guanyador i un perdedor (no hi ha empat possible). És possible que la mateixa parella d'estudiants s'enfrontin dues o més vegades, en dies diferents. Sabem que el torneig acaba de la forma següent:

- Hi ha un únic guanyador.
- Hi ha exactament 3 estudiants que acaben en segona posició.
- Cap estudiant ha perdut els 4 partits.

Quants estudiants van guanyar un sol partit i quants van guanyar exactament dos partits?

Problema 6. Siguin m i n enters positius. Siguin $a_1, \ldots, a_m$ enters positius diferents dins el conjunt $\{1, \ldots, n\}$ tals que per a qualsevol parell d'índexs i, j amb $1 \leq i \leq j \leq m$ i $a_i + a_j \leq n$, existeix un índex k tal que $a_i + a_j = a_k$. Provar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$