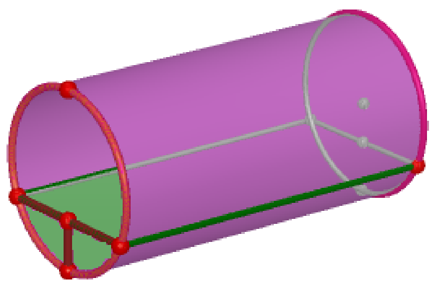
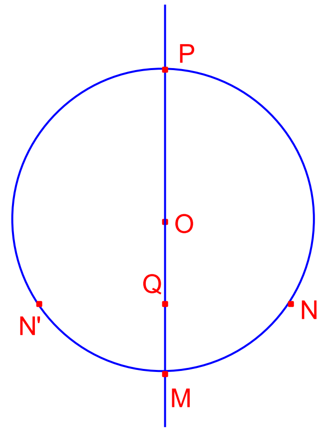
LO QUE NO SE VE DE LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

MAURICIO CONTRERAS y RICARD PEIRÓ

La resolución de ecuaciones trigonométricas debe hacerse con tecnología, porque las ecuaciones trigonométricas de los libros de texto solamente muestran unas matemáticas adulteradas, preparadas para que todo tenga solución, pero alejadas de los problemas reales. Por eso es importante la inclusión de la calculadora gráfica y el ordenador en las clases habituales de matemáticas. Y sobre todo si lo que se pretende es abordar la resolución de problemas de modelización.

Un problema de modelización real, propuesto por un profesor de ciclos formativos de grado superior es el siguiente: ¿Puedo medir el volumen de gasolina en un depósito cilíndrico usando una vara para medir la altura del líquido en el depósito? ¿Cómo calcular el volumen si sabemos la altura que alcanza el líquido en el interior del depósito?





Consideramos la circumferencia de centro O y radio R, sección vertical perpendicular al eje del cilindro. La altura del líquido será $\overline{QM}=h$. El diámetro vertical del círculo es $\overline{PM}=2R$. La cuerda que contiene al punto Q es $\overline{NN'}$ y $\overline{ON}=R$. Consideramos el ángulo $\angle MON=\alpha$ en radianes y suponemos que $h\le R$. El área del sector circular formado por los radios $\overline{ON},\overline{ON'}$ es

$$S_{sector}=\alpha\cdot R^2$$

El área del triangulo $\overset{\Delta}{ONN'}$ es: $S(ONN')=\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha$.

El área del segmento circular determinado por la cuerda $\overline{NN'}$ que contiene M es:

$$S_{segment}=S_{sector}-S_{ONN'}=R^2(\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha).$$

El volumen que ocupa el líquido és: $V=L\cdot R^2(\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$.

Escribimos el volumen en función de la altura. $\angle MPN=\angle MNQ=\frac{\alpha}{2}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PMN}$: $\overline{MN}=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MQN}$:

$$h=\overline{MN}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2R\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=(1-\cos\alpha)R\,.$$

Entonces, $\cos\alpha=\dfrac{R-h}{R}$. $\sin\alpha=\dfrac{1}{R}\sqrt{h(2R-h)}$.

Por tanto, el volumen del líquido es:

$$V(h)=L\cdot R^2\left(\arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)-\frac{1}{R^2}(R-h)\sqrt{h(2R-h)}\right)\ \text{si}\ h\le R\,.$$

El volumen del líquido si $2R\ge h>R$, és igual al volumen del cilindro menos $V(2R-h)$.

$$V(h)=L\cdot R^2\left(\pi-\arccos\left(\frac{h-R}{R}\right)+\frac{1}{R^2}(h-R)\sqrt{h(2R-h)}\right)\ \text{si}\ 2R\ge h>R\,.$$

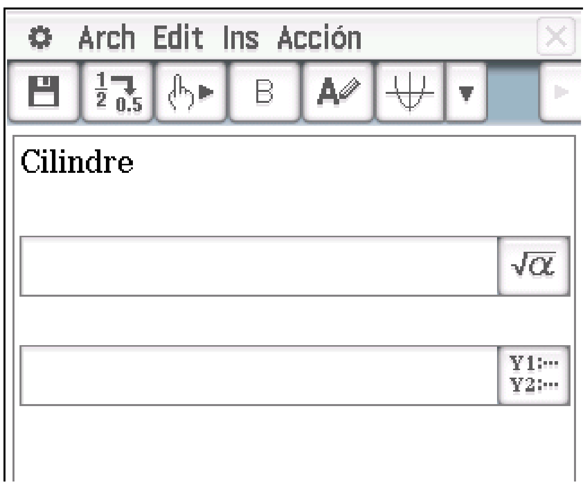
Entonces el volumen del líquido en función de l'altura h és:

$$V(h)=\begin{cases} L\cdot R^2\left(\arccos\left(\dfrac{R-h}{R}\right)-\dfrac{1}{R^2}(R-h)\sqrt{h(2R-h)}\right) & \text{si}\ 0\le h\le R \\ \\ L\cdot R^2\left(\pi-\arccos\left(\dfrac{h-R}{R}\right)+\dfrac{1}{R^2}(h-R)\sqrt{h(2R-h)}\right) & R<h\le 2R \end{cases}.$$

<u>RESOLUCIÓN CON LA CALCULADORA CASIO CP400.</u>

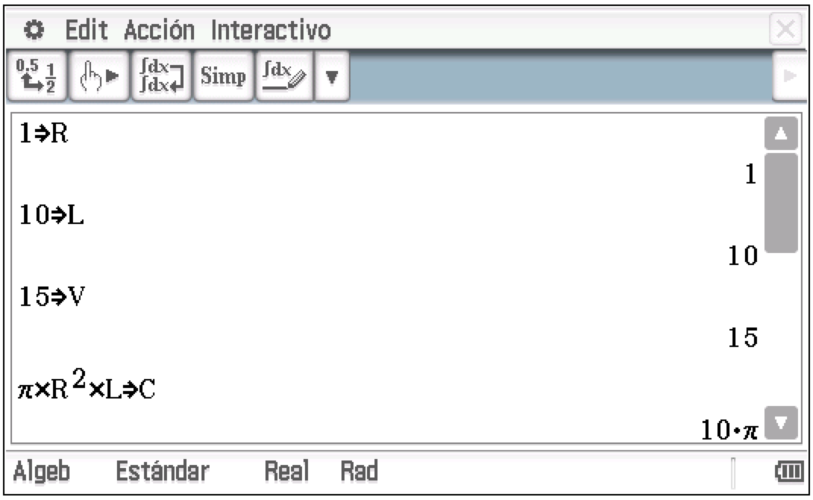
Queremos resolver el problema cuando $R=1$, $L=10$, Volum del líquid $V=15$

Creamos una eActivity



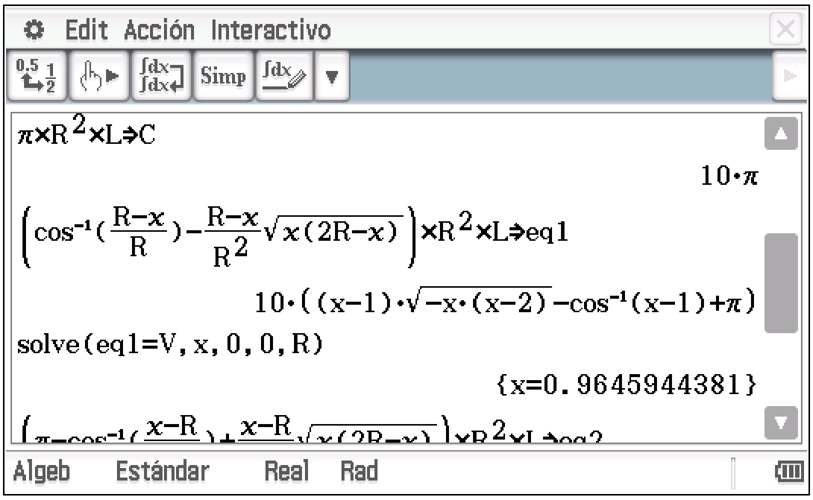
Abriremos la aplicación Principal y resolveremos el problema numéricamente:

a) Definiremos las variables R=radio del cilindro, L=longitud del cilindro y V=volumen del líquido



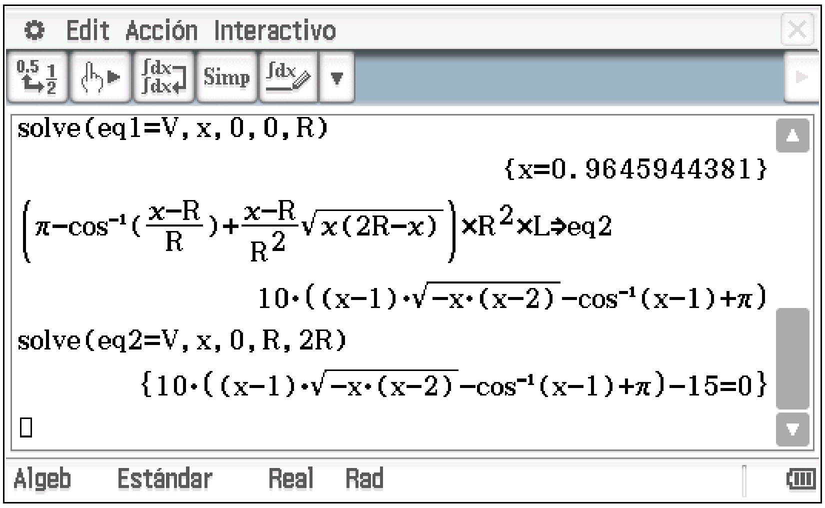
b) Calculamos el volumen del cilindro. Definimos el volumen cuando $h \le R$ dándole el nombre eq1

Resolvemos numéricamente la ecuación $eq1 = V$.



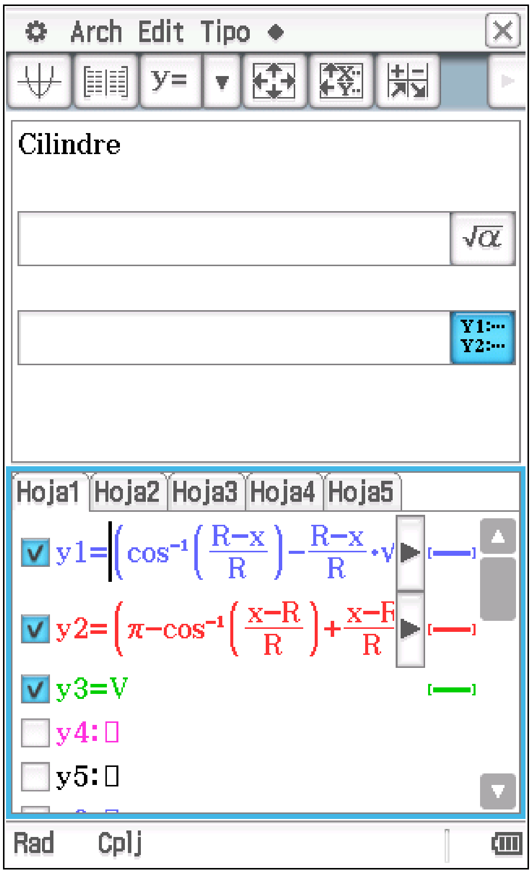
c) Calculamos el volumen del cilindro. Definimos el volumen cuando $R < h \le 2R$ dandole el nombre eq2

Resolvemos numéricamente la ecuación $eq2 = V$.

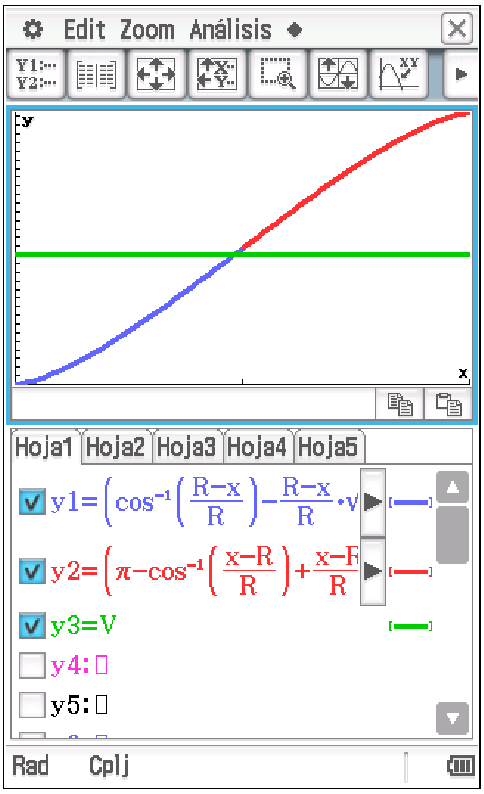


d) Abrimos la aplicación funciones y arrastramos la definición del volumen en y1, y2

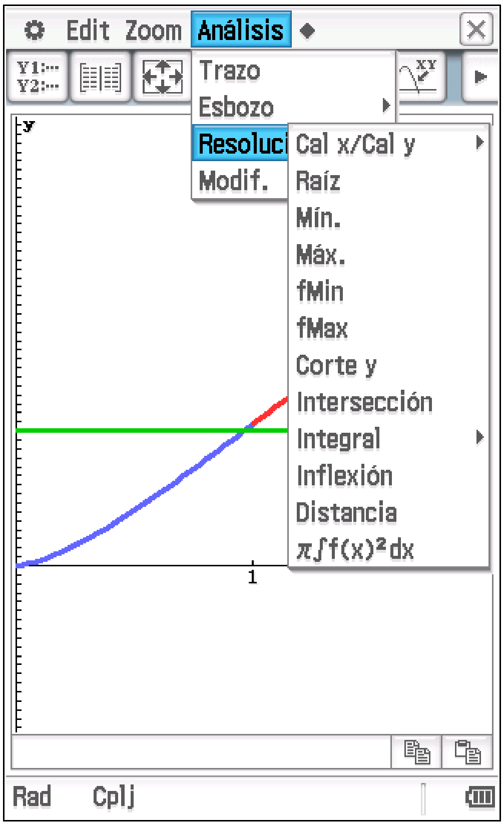
Definimos la función y3=V:

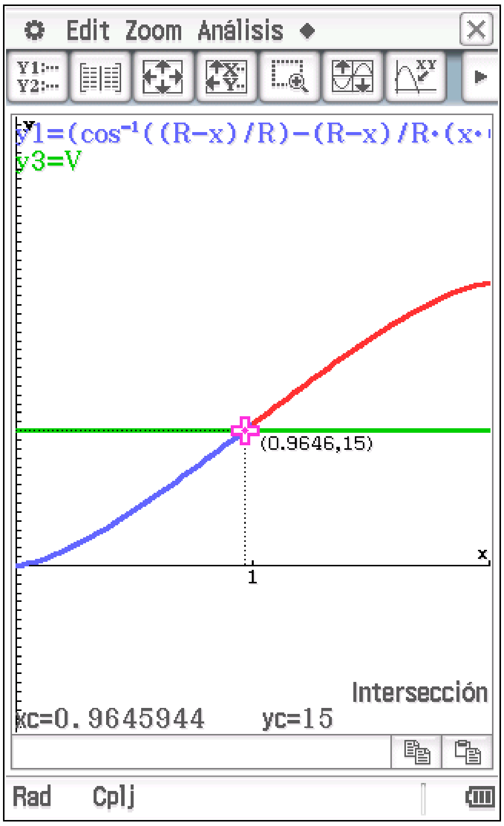


e) Representamos gráficamente las funciones.



f) Calculamos la intersección de las funciones.





Vemos que la solución es $h \approx 0.9645944$

UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA CON 32 SOLUCIONES

Una resolución alternativa a la anterior consiste en tomar el ángulo $\phi =< NON'$ en lugar del ángulo $\angle MON = \alpha$ y utilizar las siguientes tres fórmulas:

$$V = \frac{\phi \cdot R^2}{2} \cdot L - R \cdot L \cdot (R-h) \cdot \sin\frac{\phi}{2} \quad (1)$$

$$h = R \cdot \left(1 - \cos\frac{\phi}{2}\right) \quad (2)$$

$$V = \frac{\phi \cdot R^2}{L} - \frac{R^2 \cdot L}{2} \cdot \sin\phi \quad (3)$$

La fórmula (3) se obtiene de sustituir (2) en (1), de forma que solamente hay que resolver la ecuación trigonométrica (3) i después calcular h por la fórmula (2).

Observamos que de (2), deducimos que $\frac{\phi}{2} = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)$ y sustituyendo en (1), tenemos:

$$V = R^2 \cdot L \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - R \cdot L \cdot (R-h) \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R}$$, simplificando y sacando factor común L:

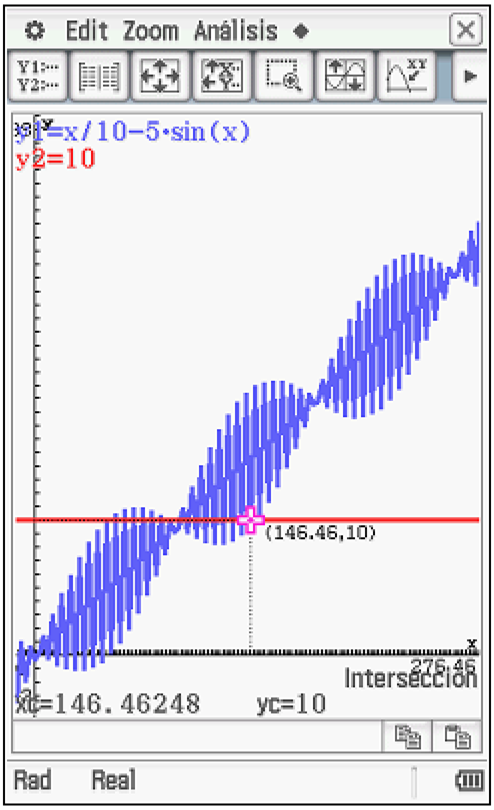
$$V = L\left[R^2 \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) + (h-R) \cdot \sqrt{2Rh - h^2}\right]$$ y por tanto:

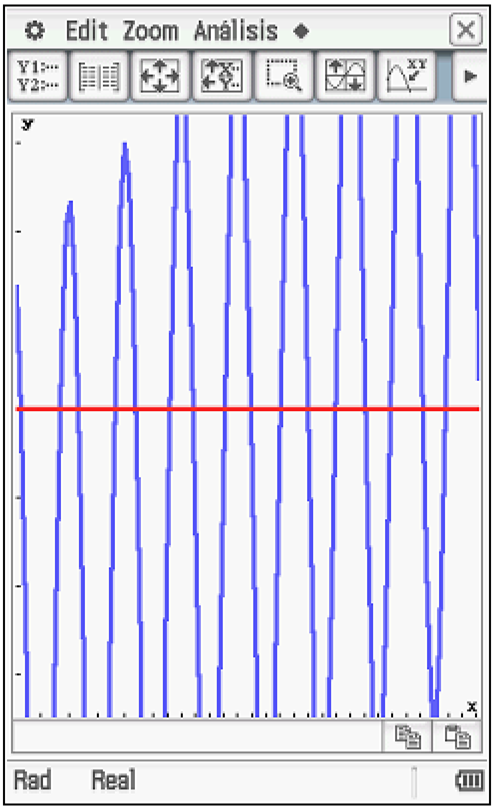
$$V = L\left[R^2 \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) + (h-R) \cdot \sqrt{h \cdot (2R-h)}\right]$$, que es la fórmula usada en la resolución anterior del problema.

Si en la fórmula (3), que se obtiene a partir de (1) y (2), hacemos R=1, L=10, resulta:

$V = \frac{\phi}{10} - \frac{10}{2} \cdot \sin\phi$ y si cambiamos $\phi = x$, resulta: $\boxed{V = \frac{x}{10} - 5 \cdot \sin x}$ que es la ecuación trigonométrica que hay que resolver para hallar el ángulo. Finalmente, basta usar las soluciones de esta ecuación trigonométrica para calcular la altura h.

Para resolver la ecuación trigonométrica usamos la CP-400 para representar gráficamente la función anterior y la V=10 y hallamos los puntos de corte… Pero nos encontramos con el problema de que las gráficas tienen exactamente 32 puntos de corte, mostrando así que la ecuación trigonométrica anterior tiene exactamente 32 soluciones. Entonces… ¿cuál de todas ellas será la habrá que tomar para hallar la altura h?





Y además surgen otros interrogantes interesantes: ¿cómo puede ser que esta ecuación trigonométrica sólo tenga 32 soluciones? ¿Una cantidad finita de soluciones? Pero si en los libros de texto siempre se dice que las ecuaciones trigonométricas tienen infinitas soluciones… ¿o es que las ecuaciones trigonométricas que se muestran en los libros de texto están escogidas para que tengan infinitas soluciones (ya se sabe, $\pm 2\pi$ radianes)?

Lo cierto es que la resolución del problema por el procedimiento de resolver la ecuación trigonométrica y luego hallar h resulta un fracaso, puesto que no sabemos cuál de las 32 soluciones puede ser la buena para hallar la altura h. Y justamente aquí está la gran conclusión de este problema: **la función arccoseno es muy importante porque permite simplificar la resolución del problema al evitar hacer una tabla con las 32 soluciones de la ecuación trigonométrica y los valores de h correspondientes, sin tener posibilidad de averiguar cuáles de los valores de h obtenidos es la solución del problema.**

Y la otra gran conclusión del problema es que: sin usar la tecnología de la CP-400 no habríamos descubierto que hay ecuaciones trigonométricas que tienen exactamente 32 soluciones. Un problema de esta naturaleza no se podría abordar ni en bachillerato si no es con ayuda de calculadora gráfica u ordenador.

Valencia, marzo 2015

Ricard Peiró

Mauricio Contreras