Títol:

Quina llauna amb les matemàtiques (Relacions volum/superfície)

Nivell:

2n, 3r i 4t d'ESO i 1r de batxillerat

Objectius principals

- Fer mesura directa
- Entendre el significat de les relacions entre magnituds importants
- Valorar les matemàtiques com a font objectiva d'argumentació

Descripció de l'activitat

Consideracions prèvies

Es treballen quatre grandàries de llaunes cilíndriques de refresc. És important recordar a l'alumnat que un model geomètric és una idealització i que no és mai coincident en el 100% amb la realitat. D'aquí que l'exercici treballi amb les nocions de *cilindre que la conté* (que seria el cilindre mínim en el qual podríem encaixar la llauna) i *secció cilíndrica pura útil* (que seria el tros de llauna que quedaria si escapcéssim les bases corbades de la llauna que ja no són cilíndriques). Fins i tot en aquest darrer cas, es fa la aproximació de obviar la gruixa de la planxa d'alumini (cosa que també es pot tenir en compte si es disposa d'un peu de rei i es fa la mesura a classe).

Presentació del problema

- Per què és interessant calcular volums i superfícies en els diferents tipus de llauna?

1. Per verificar que certament és possible que el volum de producte indicat sigui dins l'envàs. (Defensa dels interessos del consumidor.)
2. Per argumentar quina llauna és més respectuosa amb l'ús de recursos naturals com l'alumini. (Defensa d'un consum responsable i respectuós amb el medi ambient.)

Mesures

L'alumnat prendrà, cada un per separat, una llauna de refresc i amidarà el diàmetre de la secció central i l'altura total per calcular el volum del cilindre mínim que la conté. També amidarà l'alçada de les parets rectes només en els seu tram central. Amb aquestes dades, calcularà després l'àrea i el volum d'ambdós cilindres (el que la conté i el cilindre menor interior) així com la relació volum/superfície del primer cas.

1. Llauna de Coca-cola petita d'avió (15 cl):

Mesures: 5,2 cm de diàmetre secció central.
8,8 cm d'alçada (7,9 cm rectes)

Volum del cilindre que la conté: $A_b \times h = 3{,}1416 \times 2{,}6^2 \times 8{,}8 = 187\ cm^3$

Superfície $= 2.A_b + l_c.h = 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}6^2 + 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}6 \times 8{,}8 = 186\ cm^2$

Volum de la secció cilíndrica pura: $A_b \times h = 3{,}1416 \times 2{,}6^2 \times 7{,}9 = 168\ cm^3$

2. Llauna de Coca-cola petita d'avió (25 cl):

Mesures: 6,5 cm de diàmetre secció central.
9,2 cm d'alçada (7 cm rectes)

Volum del cilindre que la conté: $A_b \times h = 3{,}1416 \times 3{,}25^2 \times 9{,}2 = 305\ cm^3$

Superfície = $2.A_b + l_c.h$ = 2 x 3,1416 x $3,25^2$ + 2 x 3,1416 x 3,25 x 9,2 = 254 cm^2

Volum de la secció cilíndrica pura: A_b x h = 3,1416 x $3,25^2$ x 7 = 232 cm^3

3. Llauna de Coca-cola estàndar (33 cl):

Mesures: 6,5 cm de diàmetre secció central.
11,7 cm d'alçada (9,1 cm rectes)

Volum del cilindre que la conté: A_b x h = 3,1416 x $3,25^2$ x 11,7 = 388 cm^3

Superfície = $2.A_b + l_c.h$ = 2 x 3,1416 x $3,25^2$ + 2 x 3,1416 x 3,25 x 11,7 = 305 cm^2

Volum de la secció cilíndrica pura: A_b x h = 3,1416 x $3,25^2$ x 9,1 = 302 cm^3

4. Llauna de Coca-cola allargada (330 ml):

Mesures: 5,8 cm de diàmetre secció central.
14,5 cm d'alçada (13,1 cm rectes)

Volum del cilindre que la conté: A_b x h = 3,1416 x $2,9^2$ x 14,5 = 383 cm^3

Superfície = $2.A_b + l_c.h$ = 2 x 3,1416 x $2,9^2$ + 2 x 3,1416 x 2,9 x 14,5 = 317 cm^2

Volum de la secció cilíndrica pura: A_b x h = 3,1416 x $2,9^2$ x 13,1 = 346 cm^3

SUPERFÍCIE D'ALUMINI PER UNITAT DE VOLUM

1. Llauna petita (15 cl): 186/187 = 0,955 cm^2 d'alumini / cm^3 de volum
2. Llauna petita (25 cl): 254 / 305 = 0,833 cm^2 d'alumini / cm^3 de volum
3. Llauna estàndard: 305 / 388 = 0,786 cm^2 d'alumini / cm^3 de volum
4. Llauna allargada: 317 / 383 = 0,828 cm^2 d'alumini / cm^3 de volum

Per reflexionar

- Cap dins la llauna el volum de refresc que diu l'etiquetatge?

Sí, evidentment.

- Quina explicació té que el volum calculat no coincideixi amb el volum que figura a l'etiquetatge?

Per una banda, perquè hem calculat el volum d'un model, sense tenir en compte les desviacions de les bases. Per una altra banda, el líquid no ocupa la totalitat de la capacitat de la llauna.

- Quina llauna seria la llauna cilíndrica òptima amb criteris ambientals?

Si miram la despesa absoluta d'alumini, la de 15 cl, per despesa relativa, la de 33 cl estàndard.

Full de Càlcul "ENVASOS01"
Aquesta activitat es complementària de l'anterior i es pot presentar per ser elaborada amb alumnat de batxillerat, o per comentar amb alumnat de 3r i 4t d'ESO. Es presenta la variació de relació superfície/volum en funció del volum per a una mateixa proporció alçada/diàmetre i després la variació de relació superfície/volum en funció de la proporció alçada/diàmetre per a un mateix volum. És interessant construir-ne els gràfics.

- Per què el criteri de mínima despesa d'alumini per unitat de producte no s'aplica? Per que hi ha llaunes molt llunyanes? Què implica això?

Hi ha diverses raons: quantitat absoluta de refresc contingut, disseny, ergonomia (facilitat per abraçar la llauna amb una mà), etc.

La realitat és discreta
Quantes llaunes de cada classe convendria comprar, en termes d'estalvi d'alumini, si volem tenir com a mínim de 990 ml de refresc? I si només en volem un mínim de 750 ml?

Està clar que la llauna que presenta millor relació volum/superfície és l'estàndard. Per tant, a l'hora de comprar 990 ml de refresc optaríem per adquirir 3 llaunes.

Però en el cas de 750 ml, hauríem de comprar tres llaunes de 25 cl, ja que la quantitat absoluta de planxa d'alumini consumida seria menor que comprar dues llaunes de 33 cl i una de 25 cl.

Aquests casos són molt interessants també per treballar la diferència entre solucions per a una variable discreta (enteres) o per a una variable contínua.

Un estudi interessant per a alumnat de batxillerat podria ser: quina és la combinació òptima de llaunes (25cl i 33cl estàndard) per aconseguir un volum determinat que minimitzi la despesa d'alumini. És útil per respondre a aquesta pregunta, l'ús del full de càlcul **ENVASOS02.** També és interessant que l'alumnat sigui capaç de descobrir en llenguatge algebraic (recta) la relació entre superfície i volum d'un cilindre per a una proporció h/D donada.

Altres preguntes que es podrien fer (bé l'alumnat, bé el professorat) en tancar l'activitat:
- Quins avantatges/desavantatges presenta la geometria d'una llauna respecte dels ortoedres?
Avantatges: ergonomia (és més còmoda de tenir-la a la mà)
Desavantatges: empaquetament (l'ortoedre no deixa espais buits)
- Com venen empaquetades les llaunes als supermercats? Es podrien posar d'una altra manera?
En una retícula quadrada. Es podrien empaquetar en una retícula triangular.
- Quin és l'aprofitament de l'espai que es fa d'una manera i de l'altra?
La geometria permet associar l'aprofitament de l'espai a l'aprofitament de la superfície. Amb la retícula quadrada, s'aprofita $\pi r^2/D^2$ (=$\pi/4$, 78.5%) mentre que en la retícula triangular, s'aprofitaria $(\pi r^2/2)/\sqrt{3}. r^2$ (=$\pi//2\sqrt{3}$, 90.7%)
- Per què és important esclafar les llaunes abans de dipositar-les en els seu contenidor?

Perquè cada viatge de contenidor pugui transportar més pes de llaunes amb (quasi) la mateixa despesa de combustible.

Altres activitats
- Pren una probeta i buida una llauna dins per saber quin volum conté.

Temporització

1 hora en la versió mínima de l'activitat
2 hores en la versió completa. 1 hora d'aula + 1 hora d'ordinadors.

Àmbit competencial

- Emprar el coneixement de les formes i relacions geomètriques per modelitzar, descriure i resoldre situacions quotidianes que ho requereixin.
- Mesurar d'una manera directa les magnituds fonamentals, usant els aparells adequats i les unitats adients en cada situació.
- Aplicar les operacions aritmètiques per tractar aspectes quantitatius de la realitat valorant la necessitat de resultats exactes o aproximats.
- Usar els mètodes elementals de càlcul de distàncies, perímetres, superfícies i volums en situacions que ho requereixin.
- Presentar, d'una manera clara, ordenada i argumentada, el procés seguit i les solucions obtingudes en resoldre un problema.

Àmbit curricular

2n ESO

- Bloc 4. Geometria.
  - Cossos de revolució. L'esfera, el cilindre i el con. Descripció i propietats. Seccions planes.
  - Volums de cossos geomètrics. Resolució de problemes que impliquin l'estimació i el càlcul de longituds, superfícies i volums.
- Bloc 5. Funcions i gràfics.
  - Construcció de taules i gràfics a partir de l'observació i experimentació en casos pràctics.
  - Utilització de programes d'ordinador per a la construcció i interpretació de gràfics.
- Bloc 6. Estadística i probabilitat.
  - Utilització del full de càlcul per organitzar les dades, realitzar els càlculs i generar els gràfics més adequats.

3r ESO

- Bloc 4. Geometria.
  - Curiositat i interès per investigar formes, configuracions i relacions geomètriques.
- Bloc 5. Funcions i gràfics.
  - Ús de les tecnologies de la informació per a l'anàlisi i reconeixement de propietats de funcions.
  - Utilització de models lineals per estudiar situacions provinents de diferents àmbits de coneixement i de la vida quotidiana mitjançant la confecció d'una taula.

4t ESO

- Bloc 4. Geometria.
  - Figures i cossos semblants: raó entre longituds, àrees i volums de figures semblants. (Mat. B)
  - Aplicació dels coneixements geomètrics a la resolució de problemes mètrics al món físic: mesura de longituds, àrees i volums. (Mat. A i B)
- Bloc 5. Funcions i gràfics.
  - Interpretació d'un fenomen descrit mitjançant un enunciat, taula, gràfic o expressió algebraica. Anàlisi de resultats utilitzant el llenguatge matemàtic adequat.

1r Batxillerat (Matemàtiques I)

- Bloc 4. Funcions i gràfiques
  - Determinació d'extrems relatius. Resolució de problemes d'optimització.
  - Punts singulars d'una funció: màxims, mínims i punts d'inflexió. Interpretació gràfica.
  - Interpretació i anàlisi de funcions senzilles, expressades de manera analítica o gràfica que descriguin situacions reals.

Materials

- *A portar per l'alumnat*
  - 1 llauna de *refresc* (amb el càlcul de superfície i volum fet)

- *A portar pel CentMat*
    - Diversos tipus de format de llaunes de refresc.
    - Fulls de càlcul preparats amb les activitats ENVASOS01 i ENVASOS02
- *Recursos d'aula*
    - Ordinador i projector. Full de càlcul. (Millor si cada persona (o cada parella) té el seu ordinador.)

Metodologia

- Es planteja l'activitat a partir d'elements quotidians.
- Es minimitza la incidència en el càlcul de superfícies i volums d'un cilindre per emfatitzar la reflexió i relació de resultats.
- S'organitza i amplia la informació amb l'ús dels ordinadors.
- L'activitat contempla tots els nivells de treball: individual (a casa o a classes prèvies), petit grup (en funció de la disponibilitat d'ordinadors) i gran grup.

Avaluació

- Avaluació de l'activitat per part dels docents (full d'avaluació).

Recomanacions

- És molt important que l'alumnat porti els càlculs previs de volum i superfície.
- Per desenvolupar l'activitat en tota la seva potència, seria convenient disposar de dues hores, de manera que en la segona es tingués accés als ordinadors.

Treball posterior

- Si per qüestions d'organització només es pot fer el taller en una hora, és recomanable tancar l'activitat en l'hora lectiva següent, tractant aquells punts o qüestions que s'hauran hagut de deixar sense tractar.

Annexos

- Fulls de càlcul preparats (annexos 1 i 2)

Observacions

- El professorat titular participarà activament en la realització de l'activitat.

Referències bibliogràfiques

- "Las preguntas en la clase de matemáticas de secundaria" article de Núria Iranzo i Núria Planas, del llibre "Educación matemática y buenas prácticas" de Núria Planas, Àngel Alsina et altri, Ed. Graó, abril 2009. (pàg. 187-196).
- "Geometría cotidiana" de Claudi Alsina, Rubes Editorial SL (2005).

Pàgines web interessants

http://www.bellera.org/sostenible/sost/sostenibilitat/graci_llauna.htm
http://www.mespermenys.cat/WQ34abr/proces.html
http://www.fcalbet.arrakis.es/mates/pdf/maxmin.pdf (Problemes per a Batxillerat)