

XLV Olimpíada Matemàtica Espanyola  
Fase Local – Illes Balears  
Primera sessió  
16 de gener de 2009

**Problema 1**

Trobau tots els enters  $b$  i  $c$  tals que l'equació  $x^2 - bx + c = 0$  té dues arrels reals  $\alpha$  i  $\beta$  que compleixen  $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ .

**Problema 2**

Sigui  $ABC$  un triangle amb  $\angle BAC = 120^\circ$ . Siguin  $E$  i  $F$  els peus de les altures pels vèrtexs  $B$  i  $C$ , respectivament, i  $D$  el punt mitjà del costat  $BC$ .  
Demostrau que el triangle  $DEF$  és equilàter.

**Problema 3**

Demostrau que si  $a$ ,  $b$  i  $c$  són nombres reals positius i  $3abc = 1$ , aleshores es compleix la desigualtat:

$$\frac{3a^5}{3a^5 + 2bc} + \frac{3b^5}{3b^5 + 2ca} + \frac{3c^5}{3c^5 + 2ab} \geq 1$$

En quines condicions hi ha igualtat?

- No es permet l'ús de calculadores.

XLV Olimpíada Matemàtica Espanyola  
Fase Local – Illes Balears  
Segona sessió  
16 de gener de 2009

**Problema 4**

Provau que entre set nombres naturals quadrats perfectes, n'hi ha almenys dos la diferència dels quals és múltiple de 20.

**Problema 5**

Els nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  compleixen

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}, \quad b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}, \quad c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}, \quad d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}$$

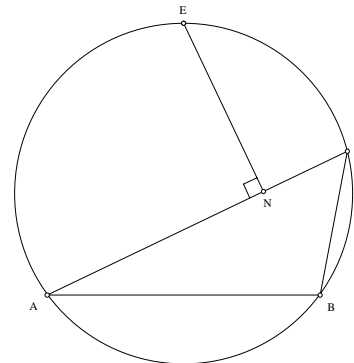
Calculau el producte  $abcd$ .

**Problema 6**

Siguin  $A$  i  $B$  dos punts donats d'una circumferència i  $E$  el punt mitjà de l'arc  $AB$ , tal com es mostra a la figura.

Escollit un punt  $P$  de l'arc  $AB$ , sigui  $N$  el peu de la perpendicular a  $AP$  per  $E$ .

Demostrau que  $AN = NP + PB$ .



- No es permet l'ús de calculadores.