You´ll never, never know,
if You never, never go.

(dicho australiano)

Introducción

Los días 24 y 25 de septiembre de 2004 tuvo lugar en Jena un congreso que trataba sobre el tema "Ordenadores y clases de matemáticas – situación actual y perspectivas", muy en boga en política educativa en nuestros días. En su transcurso se plantearon preguntas sobre la situación actual (¿Cuál es la realidad del momento en los diferentes *Länder*[1]?, ¿Qué planes existen para el futuro inmediato?, ¿Qué dificultades deben ser superadas?, ¿Qué interconexión entre los participantes es apropiada y viable?, ¿Qué proyectos de investigación existen en Jena sobre la didáctica de las matemáticas?) . Las actas del congreso pueden ser consultadas a través de internet en:
http://www.minet.uni-jena.de/preprints/fothe_04/BerichtezurTagung24.25.September.pdf. Durante el congreso se suscitó un claro interés en organizar un congreso sobre el uso de los ordenadores en los exámenes finales de matemáticas de los "*Gymnasien*[2]" alemanes (comparables a los institutos de educación secundaria, pero sólo para alumnos que cursan, o podrán cursar Bachillerato) con representantes de los diferentes *Länder*"

Este asunto está siendo discutido en la actualidad en muchos *Länder,* y se inscribe en el contexto de los procesos de cambio entre los que destacan: los Requisitos Normalizados para los exámenes finales de Matemáticas (Resolución de la 'CME', Conferencia de Ministros de Educación), el hecho de que los exámenes finales de Bachillerato descentralizados hayan sido reemplazados por exámenes finales centralizados en algunos *Länder*, la reducción de la escolaridad de 13 a 12 años y la discusión sobre niveles educativos.

En lógica consistencia con lo anterior, tuvo lugar un congreso entre el 7 y el 9 de abril de 2005, en el "Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien" (ThILLM) (Instituto Pedagógico de Turingia), en Bad Berka, con los siguientes participantes: representantes de los estados alemanes de Baden-Württemberg, Baviera, Berlín, Bradenburgo, Bremen, Hamburgo, Hesse, Baja Sajonia, Renania del Norte-Westfalia, , Renania Palatinado, Sarre, Sajonia, Schles-

[1] Nota del traductor: Land, pl. Länder: Estado perteneciente a la República Federal Alemana

[2] Nota del traductor: singular: *Gymnasium*

wig-Holstein y Turingia, nombrados por los Ministros de Educación, y además profesores de Matemáticas, representantes de Casio Europa GmbH y Texas Instruments, profesores de universitarios, científicos y alumnos de la Universidad Friedrich Schiller de Jena.

Las actas del citado congreso dan cuenta de la importancia de sus resultados en orden cronológico. A partir de un informe de seguimiento del examen final centralizado de Bachillerato en Turingia, se ofrecieron cuatro grupos de trabajo temáticos:

- Substitución de los exámenes finales descentralizados sin CAS por un examen final centralizado con CAS
- Preparación de los profesores
- Estructura de un examen final con CAS
- Evaluación del examen final.

Esta última oferta no tuvo mucho éxito. Las diferentes posturas, tanto las compartidas como las diferenciadas, son presentadas a continuación. En una segunda etapa, se esbozaron ejercicios de examen concretos sobre las áreas temáticas:

- Análisis
- Álgebra/Geometría
- Estocástica

Estos ejercicios y borradores se hallan en fases diferentes. Abarcan desde ideas que pueden ser desarrolladas posteriormente hasta ejemplos demostrados. En este contexto se intentó usar las nuevas herramientas en las clases de Matemáticas, no como un fin en sí mismas, sino para ver en ellas herramientas de trabajo capaces de mejorar las clases de Matemáticas. La necesidad de una mejora de ese tipo en los contenidos ha quedado clara, entre otras razones, por los mediocres resultados obtenidos por los alumnos alemanes en los estudios comparativos internacionales. Se describe parcialmente de qué supuesto didáctico-metodológico se partió para introducir en la escuela un medio o herramienta. Así, debe considerarse cuidadosamente qué se puede hacer con ayuda del medio o la herramienta y qué sin la ayuda de recursos. Los medios y herramientas en las clases de matemáticas son, por ejemplo, calculadoras sencillas (CS), calculadoras gráficas (CG), ordenadores de mano (OM) y PCs con sistemas de cálculo de tablas, sistemas de álgebra computacional (CAS), software de geometría dinámica (DGS) y acceso a internet, aparte de notas en la pizarra, libros de texto y libros de ejercicios. Sin embargo, en estas jornadas, el centro de atención fueron las

CAS.

Una vez más quedó claro que los Länder actúan (actuarán) de manera diferente. A condición de que exista consenso en los objetivos principales a alcanzar, resulta perfectamente admisible la diversidad de procedimientos para enfocar un tema complejo. Las opiniones compartidas fueron presentadas en detalle en los informes de los diferentes grupos de trabajo.

Pero, ¿qué tuvo de especial el congreso de Bad Berka? Tres puntos merecen ser destacados: la heterogeneidad productiva de los participantes; la disposición a comentar los problemas y dificultades abiertamente y sin reservas, y las grandes expectativas en relación a los resultados de las jornadas, especialmente por parte de los representantes de los Länder, a quienes actualmente toca organizar procesos complicados.

El principal logro del congreso reside sin duda alguna, en los numerosos y diversos ejemplos.

Desearía mostrar un agradecimiento especial a:

- todos los participantes, por su cooperación comprometida y la contribución de sus aportaciones, así como al soporte editorial para las actas de estas jornadas
- mis colegas del grupo de trabajo CAS en el ThILLM, por su apoyo en la preparación, realización y estudio posterior del congreso.
- Casio Europe GmbH y Texas Instruments Inc., por su contribución financiera.

Wolfgang Moldenhauer

Índice de materias

1 Observación de los equipos trabajando – nacimiento de un examen de bachillerato turingio con CAS –.

2 Grupos de trabajo

2.1 Substitución de un examen final descentralizado sin CAS por otro centralizado con CAS.
2.2 Preparación de profesoras y profesores.
2.3 Estructura de un examen final con CAS

3 Elaboración de las preguntas del examen.

3.1 Análisis del grupo de trabajo
3.2 Grupo de trabajo Geometría Analítica / Álgebra Lineal
3.3 Grupo de trabajo Estocástica

4 Apéndice

4.1 Operadores para las actividades del alumno en Matemáticas (borrador de 6 de julio de 2000)
4.1.1 Operadores con expectativa de respuesta definida
4.1.2 Operadores con expectativa abierta de respuesta
4.2 Uso de operadores en clases matemático-científicas con disponibilidad de calculadoras gráficas (CG) en *Gymnasien* de educación general, *Gymnasien* nocturnos y *Kollegs* (escuelas de adultos donde se prepara el examen final de bachillerato) en Sajonia (enero 2002)
4.2.1 Comentarios preliminares
4.2.2 Operadores esenciales en el uso de calculadoras con capacidades gráficas
4.2.3 Ejemplos de ejercicios de Matemáticas
4.3 Participantes

1 Observación de los equipos trabajando – nacimiento de un examen de bachillerato turingio con CAS –.

“Si la escuela de hoy consiste en machacar a los niños cosas que en una o dos décadas serán mejor realizadas por calculadoras, estamos conjurando catástrofes” (Hans Freudenthal, 1973)

A continuación se describen los reglamentos y las experiencias turingias.

En el decreto de exámenes finales de Bachillerato está la base para la preparación de los ejercicios de éstos. A continuación viene un ejemplo en que sólo se detalla la información importante.

Examen final escrito de 2005 (Publicación en el Diario Oficial de 30 de septiembre de 2003)

Estructura:

1. Bases
2. Tiempo de trabajo (270 minutos en el caso de asignatura de modalidad, 210 minutos como asignatura común, excluido en ambos casos el tiempo de lectura del enunciado).
3. Estructura de los ejercicios del examen/Número de ejercicios/Tipos de elección.

   Matemáticas como asignatura común y de especialidad.

El participante elige uno entre los ejercicios A1 y A2 y otro entre B1 y B2, y los resuelve junto al ejercicio obligatorio C.

4. Medios y herramientas

Principio básico:
Deben permitírsele usar al examinando del examen final escrito de Bachillerato aquellos medios y recursos que está acostumbrado a usar en clase.

En todo tipo de exámenes se permite un diccionario ortográfico alemán, así como una calculadora (no programable ni gráfica). **Los alumnos que usen en clase una calculadora CAS, podrán usarla igualmente durante el examen. Todas las calculadoras CAS deberán ser inicializadas antes de la prueba.**

Las matemáticas como asignatura común y de modalidad.

1 Fórmulas ...
2 Fórmulas...
3 La gran pizarra…
4 En casos excepcionales, el presidente de la junta examinadora decide, junto a la comisión de especialistas, sobre el permiso para usar otras fuentes de fórmulas. Las tablas estocásticas que pudieran ser necesarias están contenidas en el apéndice de los correspondientes ejercicios del examen.

5 Contenidos del examen.

Matemáticas como materia básica y como materia de modalidad.

Ejercicios A1 y A2: Análisis

Ejercicio B1: Álgebra Lineal/ Geometría Analítica

Ejercicio B2: Estocástica

Ejercicio C: Temas diversos

Basándose en el citado decreto de exámenes finales, una Comisión de Ejercicios prepara las tareas, generalmente bajo la dirección del correspondiente experto ThILLM (Instituto Pedagógico de Turingia). Los miembros de la comisión de Exámenes Finales son profesores[3] designados por el TKM (Ministerio Turingio de Educación). Los profesores pueden, a través de los canales ofi-

[3] A partir de ahora nos referiremos siempre a personas de ambos sexos, aunque, por rezones estilísticas, usemos sólo la forma femenina o masculina

ciales, mostrar al TKM su interés en participar, pero también son designados profesores directamente escogidos.
La composición de la comisión debería reflejar la situación del *Land* lo mejor posible (i. e. deberían estar representadas las ciudades, las zonas rurales y las clases especiales)
Para que se produzca una conexión significativa, resulta de gran importancia tener en cuenta también la adecuada supervisión por parte de consejeros y coordinadores de la especialidad, así como miembros de comisiones curriculares, etc.
Se intentará ajustarse a un principio de rotación dentro de cada comisión de trabajo. Eso significa que en la medida de lo posible, cada año algunos miembros serán reemplazados por otros colegas. Debería, a pesar de estos cambios, preservarse el grado de conocimiento global del grupo. Al mismo tiempo, nuevos colegas deberían aportar nuevos estímulos e ideas. La experiencia ha demostrado que los colegas que permanecen varios años acaban manifestando el síndrome del *"quemado".*
Es necesario que un número suficiente de miembros de la comisión dominen las técnicas informáticas, para así poder editar electrónicamente las tareas. En Turingia deben elaborarse nueve ejercicios de Matemáticas, en los cuales se mantenga el principio de igualdad.
Más exactamente:
Materia optativa: Convocatoria principal, segunda convocatoria
Materia común: Convocatoria principal, segunda convocatoria
Candidatos Externos: Convocatoria principal
La Comisión1 al efecto está compuesta por 12 miembros.

Materia optativa CAS: Convocatoria principal, segunda convocatoria
Materia común CAS: Convocatoria principal, segunda convocatoria
La Comisión2 al efecto está compuesta por 8 miembros

El promedio de ambas comisiones es de 4 miembros. Actualmente cada miembro obtiene una reducción de 1 hora.

Estructura del examen (véase decreto de exámenes finales de Bachillerato):

Análisis: Ejercicio A1 o Ejercicio A2, **30 puntos**
El alumno escoge 1 ejercicio.

Álgebra lineal/ Geometría Analítica: Ejercicio B1, **20 puntos**
Estocástica: Ejercicio B2, **20 puntos**
El alumno elige un ejercicio, generalmente correspondiente a las lecciones que ha visto.

Temas diversos: Ejercicio C, **10 puntos**
Ejercicio obligatorio

Tabla para el cálculo de la nota final (válido para Bi, Qu, If, Ma, Fil)

Puntuación	Porcentaje	Puntos de nota	Nota
58-60	96,7	15	1^{+}
55-57	91,7	14	1
52-54	86,7	13	1^{-}
49-51	81,7	12	2^{+}
46-48	**76,7**	11	2
43-45	71,7	10	2^{-}
40-42	66,7	9	3^{+}
37-39	61,7	8	3
34-36	56,7	7	3^{-}
31-33	51,7	6	4^{+}
28-30	**46,7**	5	4
25-27	41,7	4	4^{-}
22-24	36,7	3	5^{+}
19-21	31,7	2	5
16-18	26,7	1	5^{-}
0-15		0	6

Los números en negrita corresponden a la reglamentación fijada en la EPA[4] (Requisitos normalizados de exámenes, donde dice que la nota "suficiente" (5 puntos de nota) y la nota "notable"(11 puntos de nota) se darán si se han obtenido aproximadamente la mitad de la puntuación posible (al menos 45 por ciento) y unas cuatro quintas partes (al menos 75 por ciento), respectivamente. Además, la tabla tiene un umbral, de manera que se necesita una puntuación mínima de 16 sobre 60 para obtener un punto de nota. Esta tabla estandarizada es aprobada por el profesorado. A veces causa dificultades cuando se preparan ejercicios, ya que éstos han de estar adaptadas a la parrilla estandarizada de las puntuaciones.

Para tener en cuenta la práctica escolar real cuando se preparan ejercicios de exámenes finales **las autoridades educativas solicitan sugerencias a los funcionarios docentes** para los exámenes finales de matemáticas (los procedimientos son diferentes para las diferentes materias; por ejemplo, los ejercicios de Informática son elaborados sólo por los miembros de la Comisión)**.** A estos efectos, se escribe a cinco de los trece funcionarios docentes de la comisión y se les pide que designen para preparar ejercicios con sus correspondientes soluciones. Se requieren diez esquemas de Análisis, cinco de Álgebra/Geometría Analítica y cinco de Estocástica. Los citados borradores son enviados, junto a in impreso de declaración jurada de mantenerlos en secreto, al consejero ThILLM.
La Comisión1 **examina las sugerencias presentadas.** Se determinan eventuales incorrecciones. Finalmente se estipula qué miembro de la comisión elabora cada uno de los ejercicios presentados.

[4] Requisitos par las puntuaciones de pruebas en las pruebas finales de Bachillerato (Decisión de la Comisión del Ministerio de Cultura de 1.12.1989 y subsiguientemente de 24.05.2002)

Reunión a puerta cerrada:
La Comisión1 es responsable de la materia común, la optativa y los Externos. Sin embargo, se observa que los responsables de la materia común y los de las optativas tienden a separarse. El objetivo de la mayor parte de las jornadas de tres días es preparar las tres convocatorias principales, de manera que al menos haya una versión electrónica de estos ejercicios.
Después de eso, los archivos borrador se salvan en un ordenador en el TKM. Las copias impresas se envían a la Comisión1 Las correcciones sobrevenidas son incorporadas a los archivos borrador. El resultado es una prueba de impresión.
Esta prueba de impresión es el borrador para la Comisión2, quien prepara el examen final CAS.

Nuestra experiencia demuestra que el trabajo intensivo con los ejercicios en el seno de la comisión conduce a veces a formulaciones o a requerimientos parciales que el examinando – sobre todo a causa de la limitación de tiempo –no es capaz de entender. Para evitar tales malentendidos y ambigüedades ha demostrado ser útil una prueba previa del *test*.
Se le pide a una delegación territorial del *Land* que designe cuatro profesores. A dos se le dan las pruebas y las soluciones de la materia común y a los otros dos de la optativa. Después de que hayan trabajado los ejercicios se recogen oralmente sus comentarios. Se les pide una valoración general del borrador de examen, es decir, una estimación del nivel (demandas excesivas o demasiado bajas, equilibrio de los requisitos), juzgar la equivalencia de A1 y A2 o B1 y B2 respectivamente, analizar los detalles de las formulaciones y hacer comentarios sobre la solución si fuera necesario, así como indicar el tiempo necesario para contestar cada parte de los ejercicios. Los comentarios de los colegas han comportado modificaciones cada año.
Además, también se consulta un experto.
Un experto no turingio (actualmente uno de Baden-Württemberg) recibe los cinco exámenes preparados de las convocatorias principales (a saber, tres de la Comisión1 y dos de la Comisión2. La valoración se lleva a término en una discusión de especialistas en presencia de algunos miembros de la comisión, análogamen-

te a la prueba previa del examen. Esta discusión técnica es muy valorada en Matemáticas, ya que introduce el punto de vista de un colega que no aplica el sistema turingio.

Inicio del redactado final:

Los comentarios de la "prueba previa del examen" y de la discusión de especialistas se introducen en el ordenador del TKM. Se prepara una copia impresa del examen, se corrige, etc. (si es preciso con intervención de miembros de la comisión)

Logística (impresión, envío)

En enero, después de que haya tenido lugar la elección de las materias de examen, empieza el análisis de necesidades de cada Centro escolar/delegación territorial del *Land*.

Cada escuela y cada delegación territorial recibe un archivo en el que ha sido introducido el número de exámenes necesarios. Las escuelas comunican sus números requeridos a la autoridad educativa, quien entonces envía al ministerio un informe colectivo. La impresión tiene lugar en el período entre enero y marzo. Inmediatamente después de la impresión, se retractilan juntos los exámenes y sus soluciones. El retractilado se realiza en paquetes (10 preguntas en papel blanco, 2 respuestas en papel amarillo)

Los paquetes necesarios para cada delegación territorial son agrupados y despachados por el departamento responsable de ello en el TKM. Los directores reciben los paquetes correspondientes de la Delegación territorial.

Un paquete completo permanece en la delegación territorial (para el caso de posibles preguntas al respecto el día del examen) y otro en el ministerio (para el caso de preguntas e información a la prensa)

Evaluación y resultado:

Para poder evaluar los resultados de los exámenes finales, cada escuela recibe un impreso de evaluación que debe ser rellenado y entregado al inspector especialista responsable. El inspector especialista elabora un resumen sobre las escuelas por él supervisadas dentro de su zona de la delegación territorial. Este resumen es remitido a la ThILM, quien a su vez elabora un resumen de todo el *Land.* A partir de los puntos fuertes y débiles reflejados en este sondeo se diseñan y acuerdan prioridades de formación adicional. Juntamente con las escuelas que supervisa, el inspector especialista fija las tareas principales a nivel regional. Finalmente, cada departamento de cada escuela puede discutir sus resultados y si es necesario, llegar a los acuerdos necesarios.

Objetivo de un cambio a un examen final CAS:

El cambio a un examen final CAS parece sensato a medio plazo sólo si se opta por una “versión final” del examen final turingio de bachillerato después de que se haya producido un uso consolidado y generalizado del CAS en Turingia en los niveles 10-12 (Bachillerato)

1ª parte: Fundamentos matemáticos de diferentes áreas; se examinan las competencias básicas; aquí no se permiten herramientas de ayuda (corresponde a una ampliación adicional de la actual Parte C)

2ª parte: Deben realizarse tareas orientadas a problemas de las áreas de Análisis y Álgebra Lineal /Geometría Analítica y Estocástica; aquí se permiten todas las herramientas y medios, como por ejemplo calculadoras CAS, notas de la pizarra, etc. y la solución del alumno debe revelar una explicación de la solución del problema bien estructurada y describir todas las reflexiones cruciales (esto corresponde a una ampliación de nuestras habituales partes A y B.)

Comentario: no está claro para nosotros si es necesaria una separación organizativa entre las partes 1 y 2 o si esto mismo puede conseguirse a través de las formulaciones de los enunciados de los ejercicios.

La persecución de este objetivo no significa ninguna “ruptura” con las tradiciones en los ejercicios de los exámenes finales de bachillerato turingios, sino es una consecuencia de la dirección que toma la nueva cultura de ejercicios con los nuevos recursos matemáticos existentes CAS.

Concretamente fueron aprobadas las siguientes estipulaciones:

Examen final escrito 2002[5]- Matemáticas

Sugerencias para adaptar las tareas al uso de calculadoras CAS

1. La <u>estructura</u> de las cinco tareas permanece inalterada

	Análisis	A1 o A2
con	30 puntos.	
	Álgebra Lineal/Geom. Analítica	B1
o	Estocástica	B2
con	20 puntos.	
	Ejercicios temas diversos	C
con	10 puntos.	
		Total:
	60 puntos.	

2. <u>Todas las subtareas</u> [a), b), c),…] de las partes mencionadas en 1. son examinadas para descubrir si mediante el uso de CAS el correspondiente “problema” es simplificado por lo que respecta a sus subtareas (ej.: hacer derivadas, dibujar gráficas, resolver sistemas de ecuaciones, etc...).

[5] En el año 2002 se ofreció por primera vez un examen final de Bachillerato CAS.

3. a) Si no son necesarias modificaciones por lo que concierne a 2. , la subtarea debería, tanto como sea posible, ser asumida en la versión presentada.

b) En el caso de una “simplificación” de la subtarea original a causa del uso de CAS, la subtarea debe ser modificada.

1er caso: La subtarea en cuestión puede permanecer invariable en lo esencial si es posible revalorizar, por lo que respecta a contenido, el esfuerzo de cálculo reducido mediante la integración de operadores adecuados. (véase también: Material del grupo CAS para la materia *Operadores para alumnos,* Catálogo ThILLM de Educación para adultos para escuelas de formación general y de formación profesional Agosto 2001 a Febrero 2002, pág. 16)

2º caso: La subtarea en cuestión no puede ser asumida como en el caso 1. es decir, deben incluirse nuevos elementos de tareas (que, sin embargo, deberían ser conectados con la tarea principal por lo que respecta a contenido)

- pueden incluirse elementos (individuales!) que no podían aparecer en los ejercicios de los exámenes finales originales (Ejemplo: "Resuelva en R: exp(x) - x^2 = 0 !")
- En este caso, la integración de *operadores* en la tarea modificada puede tener sentido también.

4. Principios básicos

- Si es posible, los puntos originalmente acordados deberían permanecer inalterados en la subtarea modificada.
- Los dos exámenes finales (*Versión original 2002* y *versión modificada 2002* deberían tener el mismo grado de dificultad en total.
- En la versión modificada debería ser “fácilmente al-

canzable” la misma puntuación, lo que significa especialmente que las subtareas a ser modificadas, por lo general, no pueden ser orientadas a la banda de requerimientos III de la EPA.

Con respecto a nuestro trabajo posterior, debe también considerarse la estructura. Véase a continuación una posible propuesta estructural seguida de sugerencias de ejercicios con soluciones para cada parte individual.

Posible estructura de un examen final (materia optativa)

Parte obligatoria (sin herramientas de ayuda, 60 min.)

Parte A: Competencias y conocimientos básicos

15 puntos

Parte opcional (se permiten calculadora CAS y notas de la pizarra, 210 min.):

Parte B: Análisis

El examinando escoge exactamente una de las dos tareas.

25 puntos

Parte C1: Álgebra Lineal/Geometría Analítica
Parte C2: Estocástica

El examinando escoge bien C1 o C2.

20 puntos

Tabla para el cálculo de la nota final

Puntuación	Porcentaje	Puntos de nota	Nota
58-60	96,7	15	I^{+}
55-57	91,7	14	1
52-54	86,7	13	1^{-}
49-51	81,7	12	2^{+}
46-48	**76,7**	11	2
43-45	71,7	10	2^{-}
40-42	66,7	9	3^{+}
37-39	61,7	8	3
34-36	56,7	7	3^{-}
31-33	51,7	6	4^{+}
28-30	**46,7**	5	4
25-27	41,7	4	4^{-}
22-24	36,7	3	5^{+}
19-21	31,7	2	5
16-18	26,7	1	5^{-}
0-15		0	6

Parte A, 1ª propuesta (sin herramientas de ayuda, 15 puntos, **60 min.**)

1. Determine el comportamiento de simetría del gráfico de la función derivada **f’,** por medio de un ejemplo escogido por usted, si la función no constante de salida **f** ¡es una función impar!
   ¿Puede generalizar su afirmación? (Razone su respuesta)
   4 puntos
2. Dados los siguientes puntos A(7; 2; 5), B(9; 5; 11), C(1; 0; 8), determine la longitud del lado mayor y las dimensiones del ángulo menor del triángulo ABC
   3 puntos

3. Sobre la mesa hay un número igual de guantes para la mano izquierda y para la derecha. ¿Para qué número de

guantes son iguales las probabilidades de coger un par (uno izquierdo y uno derecho) o bien dos guantes iguales, si los dos guantes se cogen uno tras otro sin restitución, y la probabilidad de cada guante de ser cogido es la misma? 2 puntos

4. Determine todos los números reales *c* para los que se cumple: $\int_0^c \left(x^2 - 2x\right)dx = 0$.

   2 puntos

5. Determine las ecuaciones de dos funciones cuadráticas que se intersectan ortogonalmente en P(2; 3)

   4 puntos

Tiempo para las partes B y C: 210 minutos

Parte B, 1ª propuesta (se permiten calculadora CAS y notas de la pizarra; debe elegirse una ejercicio; **25 puntos**)

B1 Dada la función *f* mediante $f(x) = 6\sin(2x) + 3$ definida en el intervalo $\pi \le x \le 2\pi$:

1. Determine los extremos y el cero de la función *f*. Dibuje el gráfico de la función f en el intervalo dado.

   5 puntos

2. Determine un número real de manera que *g* tal que

   $$g(x) = a(x-\pi)(x-\frac{3}{2}\pi)(x-2\pi)+3$$

   se aproxime a la función *f* tanto como sea posible.
   Razone su elección de *a*.

   5 puntos

3. La función h con

$$h(x)=\begin{cases} -\frac{96}{\pi^2}(x-\pi)(x-\frac{3}{2}\pi)+3, & \pi\le x\le\frac{3}{2}\pi \\ +\frac{96}{\pi^2}(x-\frac{3}{2}\pi)(x-2\pi)+3, & \frac{3}{2}\pi<x\le 2\pi \end{cases}$$

también se aproxima a la función *f*.

Las funciones aproximadas tienen sentido si pueden ser usadas para exámenes posteriores. Deberían ser particularmente fáciles de calcular, al menos ser continuas, mejor aún si son diferenciables.
Compruebe si la función h es diferenciable
Calcule

a) $I_g=\int_{\pi}^{2\pi}\left(f(x)-g(x)\right)dx$ y

b) $I_h=\int_{\pi}^{2\pi}\left(f(x)-h(x)\right)dx$.

Wolfgang sugiere considerar I_g e I_h como indicadores de cómo se aproximan la función *g* y la función *h,* respectivamente, a la función *f*. Interprete de manera adecuada sus valores calculados y a continuación discuta la propuesta de Wolfgang

7 puntos

4. Haga otra propuesta de cómo el grado de acercamiento a *f* de las funciones *g* y *h* puede ser adecuadamente determinado.
Argumente su propuesta y calcule la medida de calidad de *g* y *h* relativa a *f* en base a su propuesta. ¿Qué función muestra una mejor aproximación?

8 puntos

B 2 Dadas las funciones f_t y h de ecuaciones

$f_t(x)=t\cdot\sqrt{x-6}$ con $x\in[6;\infty)$ y $t\in\Re$ y $t>0$ y

$h(x) = \frac{x-6}{(x-7)^2}$ con $x \in \Re$ y $x \neq 7$.

1. Esquematice los gráficos de las funciones f_t si $t = 1$ y h en un intervalo apropiado. Explique el gradiente del gráfico de h e indique las características esenciales y las coordenadas.

   5 puntos

2. Calcule el contenido del área que queda completamente encerrado por los gráficos de f_t si $t = 1$ y h así como por las líneas rectas de ecuaciones $x_1 = \frac{33}{4}$ y $x_2 = 10$

   2 puntos

3. Se da una función adicional g de ecuación $g(x) = \frac{2x^2 + 8x + 9}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}$, en la cual se cumple $x \in \Re$ and $x \neq -2$

   Analice los gráficos de h y g por lo que respecta a relaciones.

   4 puntos

4. La tangente del gráfico de h en P(6; 0) intersecta a ésta última en un punto más alejado. Determine sus coordenadas.

   3 puntos

5. Determine un término para la n-ésima derivada de la función *h* y pruébelo con la ayuda de la inducción completa

   5 puntos

6. El gráfico de *h* tiene tres puntos en común con cada curva de la familia f_t, que se describen con un valor x creciente como R, S y T.
   Demuestre que el ángulo entre los gráficos es independiente del parámetro t en el punto R y calcule su valor

   3 puntos

Determine el parámetro t de manera que los gráficos se intersecten ortogonalmente en el punto T.

3 puntos

Parte C, 1ª propuesta (Herramientas como en B, hay que elegir un ejercicio; 20 puntos)

C1 Álgebra Lineal / Geometría Analítica

Dados dos cuboides ***Q*** , cuyas áreas de la base (rectangular) son determinadas por los puntos A(2; 12; 14), B(22; 32; 4), C(32; 21; 2) y D(12; 1; 12)
(unidad de coordenadas 1 cm.).

a) Calcule la longitud de la arista de uno de esos cuboides, que en lo sucesivo llamaremos $\boldsymbol{Q_1}$ y que tiene un volumen de 27

¿Para qué aristas de otro cuboide $\boldsymbol{Q_2}$ con la misma área de la base ABCD son iguales los valores medidos de volumen **V** y superficie $\mathbf{A_O}$?

Sugerencia: Para un cubo de longitud de arista $a = 6$ cm. es válido por ejemplo $V = a^3 = 216cm^3$ y $A_O = 6 \cdot a^2 = 216cm^2$; los valores medidos de V y A_O son por tanto ambos igual a 216.

5 puntos

b) Dé coordenadas posibles de los vértices del área superior EFGH del cuboide $\boldsymbol{Q_3}$ con la longitud de arista $\overline{AE} = 60\,cm$ y demuestre que para los tres ángulos de inclinación α_1, α_2 y α_3 de las áreas laterales del cuboide se cumple lo siguiente relativo al plano de coordenadas x-y :
$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$

7 puntos

c) Dada la recta **g** con $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \vec{a}$; $t \in$ R y el plano **ε,** que contiene los puntos A, B y C, con el vector normal $\vec{n}$.

c 1) Interprete geométricamente la relación de posición de la recta **g** relativa al plano **ε** para el caso $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ y $P_0 \notin$ **ε**

2 puntos

c 2) Existe exactamente una recta especial **g** a través de P_o (k; 20; 10) para cada $k \in \Re$

y $\vec{a} = \begin{pmatrix} -40 \\ k^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Determine todos los valores paramétricos k de manera que se den otras relaciones de posición entre la recta **g** y el plano **ε** que las de la subtarea c 1)

6 puntos

C 2 Estocástica

1. En 2002 tuvieron lugar por primera vez elecciones parlamentarias libres en la joven República de Olyvia. Sólo dos años después, en 2004, hubo que convocar nuevas elecciones debido a rezones políticas graves. En Olyvia existe básicamente un sistema bipartidista donde esporádicamente se presentan candidatos independientes, de manera que en los análisis simples se4 puede desestimar los esporádicos candidatos individuales independientes. En 2002 el Partido A alcanzó un 62,7 por ciento de los votos a escala nacional; dos años después sólo el 41,6 por ciento.

   La tabla siguiente da una visión global sobre los resultados electorales para el Partido A en 2002 y 2004 en los doce distritos electorales del país

Distrito	Votos para el PartidoA 2002	Votos para el Partido A 2004
1	58.1%	36.0%
2	60.1%	42.1%
3	59.1%	41.2%
4	65.9%	45.2%
5	58.8%	38.8%
6	60.2%	40.1%
7	63.1%	41.6%
8	58.2%	38.9%
9	68.5%	45.6%
10	73.1%	51.5%
11	80.2%	54.8%
12	85.0%	52.3%

Como primera aproximación puede suponerse que el porcentaje nacional *p* de los antiguos votantes del Partido A vota ahora por el Partido B. Viceversa, un porcentaje *q* de los antiguos votantes del Partido B vota ahora por el Partido A. Se acepta que el número de votantes será constante (para este breve período de tiempo).

1.1 Las cuotas electorales del partido A en el iº distrito el año 2002 se designas con x_i, mientras s los votos de 2004 con y_i $(1 \le i \le 12)$. Demuestre que una relación lineal $y_i = mx_i + n$ deriva de la aceptación de la existencia de votantes que cambian el sentido del voto.

1.2 Demuestre que los supuestos teóricos casan bastante bien con los datos empíricos. Determine, con los citados datos, valores aproximados para los parámetros *m* y *n* y, a partir de ellos, para los porcentajes *p* y *q*.

2. Los resultados electorales a escala nacional de los dos años pueden ser simulados con al ayuda de las urnas:

Urna 1: 627 bolas negras y 373 bolas blancas;
Urna 2: 416 bolas negras y 584 bolas blancas.
Supuesto: Ambas urnas son idénticas externamente

2.1 Se elige una urna al azar y se extrae una bola negra. ¿Con qué probabilidad se extrajo de la urna 1?

2.2 Basándose en estos hechos, un "*test* de detección de urnas" podría parecerse a lo siguiente: Se elige una urna al azar y se extrae una bola; si es negra, se identifica la urna como urna 1, en caso contrario es la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de tomar una decisión equivocada en este *test*?

2.3 Para reducir esta probabilidad de error, se le propone la siguiente modificación: elige una urna al azar y saca una bola veinte veces seguidas, la cual es reintroducida inmediatamente después de comprobar su color (antes de extraer la siguiente bola). Si, en este caso, más de la mitad de las bolas son blancas, decide que debe ser la urna 1; en caso contrario, decide que es la urna 2.
¿Cuál es la probabilidad de error α para el procedimiento arriba descrito de no detector la urna 1 por error?

2.4 ¿Cuál es la probabilidad total de error de este "*test* de detección de urna" modificado?

2.5 El procedimiento propuesto en 2.3 puede también realizarse con más de 20 extracciones. Determine el número mínimo de extracciones para reducir la probabilidad de error α con la regla descrita más arriba (véase 2.3) a menos del 5 por ciento.

Parte A, 2ª propuesta (sin herramientas, 15 puntos)

1) Para cada par (a; b) de números reales se da una función f con $f(x) = \begin{cases} a \cdot \sqrt{x} & \text{for } x \geq 4 \\ b \cdot x + 4 & \text{for } x < 4 \end{cases}$.

El gráfico de f no debe mostrar saltos o discontinuidades. ¿Para qué valores de A y B es éste el caso?

5 puntos

2) Tenemos una pirámide cuadrada recta P con un volumen de 2005 unidades, una arista de la base de longitud a y una altura h.
Determine la relación entre $h : h_a$ para el caso en que sea válido $a : h = 2 : 3$.

1 punto

Examine la altura h_a de las caras laterales, dependiendo de la altura de la pirámide h.

4 puntos

3) (Imagen) Dado un cuboide ABCDEFGH con las dimensiones $\left|\overline{AB}\right| = 6LE,\ \left|\overline{AD}\right| = 5LE,\ \left|\overline{AE}\right| = 4LE$. Sea K el centro de la arista $\overline{GH}$. Determine el punto de intersección del plano EBK con la recta que une D y F.

5 puntos

Parte B, 2ª propuesta (con calculadora CAS y notas de la pizarra; ejemplos inconexos)

1) Demuestre que las gráficas de las siguientes funciones son simétricas respecto a un punto!
a) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$
b) $y = f(x) = \dfrac{8x-7}{2x-3}$
Generalice las proposiciones que ha encontrado y demuestre su corrección.

2) $y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - x^3 \quad \text{con} \quad D(f) = \Re$
a) Realice una discusión de curva
b) Determine el punto de intersección y el ángulo de intersección de la tangente de inflexión
c) Se añadirá un sumando al término de función de f, de

manera que el gráfico de esta nueva posee exactamente dos mínimos locales. Dé un ejemplo y explique el desarrollo.

3) $y = f(x) = -x^4$ con $D(f) = \Re$

Se añadirá un sumando al término de función de f, de manera que el gráfico de esta nueva función tenga la característica de poseer tangentes de inflexión verticales asociadas. Dé un ejemplo.

4) Determine un polinomio de tercer grado cuya gráfica reúna las siguientes características:

(1) P(2; 0) y Q(4; 0) están situadas en el gráfico

(2) la tangente de inflexión intersecta el eje y en R(0; 1).

C 1 Geometría 2ª propuesta

1. Determine las coordenadas de los vértices de un cuboide con una superficie de 2005 unidades de medida, cuyas aristas ni están en el plano coordenado ni son paralelas a éstas.

7 puntos

C 2 Estocástica 2ª propuesta

"Saca otra vez!" – un juego para dos personas

Este juego se lleva a cabo con una urna donde hay bolas blancas y negras. Una jugada consiste en dos extracciones: Para comenzar, el primer jugador extrae una bola, antes de que sea devuelta; el segundo jugador saca otra bola. El Segundo jugador gana si extrae una bola de distinto color que el primer jugador; de lo contrario gana el primero.

1. Determine la probabilidad de la victoria del segundo jugador para el caso en que en la urna haya seis bolas blancas y catorce negras

2 puntos

2. Determine todos los números de bolas blancas, para los cuales la probabilidad de victoria del segundo jugador es mayor que la del primero, habiendo un total de veinte bolas en la urna.

2 puntos

Hay varias versiónes del juego:

Versión 1: Se juega como se ha descrito antes.

Versión 2: Se hacen varias jugadas seguidas – a partir de ahora lo llamaremos *set* – de manera que después de cada *set*, las bolas se devuelven a la urna. El jugador que gana primero un total de dos *sets*, gana la partida.

Versión 3: Se juegan varios *sets*. El jugador que gana primero tres *sets* , gana la partida.

3. Determine la probabilidad de victoria del segundo jugador para estas tres versiónes en el caso de que haya 10 bolas blancas y 10 negras en la urna.

5 puntos

Cambiando el número de bolas blancas y negras, la probabilidad *p* de victoria del segundo jugador para un *set* puede variar casi de manera arbitraria.

4. Indique un número de bolas blancas y negras, para el cual un *set* o una partida jugados según la Versión 1 sean justos.

3 puntos

5. Represente en un diagrama adecuado las probabilidades de victoria del segundo jugador para las versiónes 1,2 y 3, dependiendo de *p*. Describa las correlaciones entre las probabilidades en un texto breve.

4 puntos

6. Determine los valores de *p* para los cuales las probabili-

dades de victoria del segundo jugador para las versiones 1 y 3 difieren al máximo. Interprete sus resultados.

3 puntos

7. Se necesitan varios *sets* para ganar en distintos juegos de pelota (tenis, voleyball, etc.) ¿Qué conclusiones puede extraer de sus resultados anteriores?

1 punto

Soluciones Parte A, 1ª propuesta

1. Para la función impar $y = f(x) = x^3$ se obtiene como función derivada $y' = f'(x) = 3 \cdot x^2$. Esta función derivada es par porque para cada x, la ecuación $f'(-x) = f'(x)$ es válida. El examen de polinomios con $y = f(x) = x^k$, siendo k un número entero impar, muestra que su derivada también es una función par en todos los casos.

   Por tanto podemos asumir que la función derivada de una función impar es una función par en todos los casos.

   Versión 1: La demostración puede realizarse con la ayuda de las características de los gráficos de las funciones impares, ya que son simétricas respecto del origen, es decir, la imagen se mapea sobre sí misma mediante una rotación de 180° alrededor del origen. En esta rotación una tangente en la posición x se mapea sobre una tangente paralela en la posición (-x). Las tangentes en las dos posiciones *x* y *(-x)* tienen por tanto la misma pendiente; las derivadas en estas posiciones son por lo tanto iguales, como queríamos demostrar.

   Versión 2 para la demostración general:

   $$f \text{ impar} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h}$$

   $$\Rightarrow f'(x) = f'(-x)$$

   Versión 3: f es impar, por tanto $f(-x) = -f(x)$. La diferenciación de la ecuación proporciona inmediatamente la proposición.

2. La distancia entre dos puntos puede ser determinada por la fórmula $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Se obtiene $\overline{AB} = \overline{AC} = 7$ y $\overline{BC} = 7 \cdot \sqrt{2}$, la cara $\overline{BC}$, por tanto, es la más larga. Ya que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ es válido, el triángulo ABC es rectangular después de la inversión del Teorema de Pitágoras, e isósceles según el cálculo anterior. Los ángulos básicos, que son los ángulos interiores más pequeños, son por tanto del tamaño $\frac{1}{2} \cdot (180° - 90°) = 45°$.

3. Versión 1: Si el primer guante fue extraído sin restitución, el número de guantes del tipo del extraído (sea izquierdo o derecho) es en 1 inferior al número de guantes del otro tipo. En la segunda extracción es, por tanto, más probable sacar un guante del tipo complementario. Así, la probabilidad de extraer un par de guantes es superior a la de extraer dos iguales, por tanto estas probablidades nunca son iguales.
   Versión 2: Si 2n es el número total de guantes, es válido lo siguiente (correspondiendo a las reglas de decisión)
   $$P(pareja) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$$
   $$P(no - pareja) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1}$$

4. $\int_0^c (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3} \cdot c^3 - c^2 = \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot (c-3) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ or } c = 3$

5. Deben elegirse dos parábolas normales, una abierta hacia arriba, la otra hacia abajo , Para la parábola abierta hacia arriba se puede elegir como ejemplo la ecuación $y = f(x) = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$, ya que el punto dado P(2; 3) queda sobre la parábola. En este punto la parábola tiene la pendiente 2.
   $y' = f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(2) = m_1 = 2$.

La pendiente de una recta ortogonal a la tangente es, por tanto,
$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$. La ecuación de la parábola requerida debe tener ahora las siguientes características: $y = g(x) = -x^2 + a \cdot x + b$ y $3 = -4 + 2a + b$ y $-\frac{1}{2} = -2 \cdot 2 + a$
, por lo cual , la última ecuación resulta de la condición para la pendiente de la tangente en P. La solución del sistema lineal de ecuaciones es
$a = \frac{7}{2}$ y $b = 0 \Rightarrow \mathrm{y} = g(x) = -x^2 + \frac{7}{2} \cdot x$.

General:
Elija $t, r, s \in \Re$ arbitrariamente, pero con Entonces, la solución general es como sigue:
Parábola 1: $y = f(x) = tx^2 + rx + (3 - 4t - 2r)$
Parábola 2:

$$y = g(x) = -\frac{1}{4}(s + \frac{1}{4t + r})x^2 + sx + (3 - s + \frac{1}{4t + r})$$

Soluciones B 1, 1ª propuesta

1. $n_1 = \frac{19}{12}\pi$, $n_2 = \frac{23}{12}\pi$; $H(\frac{5}{4}\pi; 9)$, $T(\frac{7}{4}\pi; -3)$ y demostraciones

5 puntos

2. ej: los gráficos de f y g no solo deberían tener en común los límites y el punto de inflexión, sino también los extremos $H(\frac{5}{4}\pi; 9)$ y $T(\frac{7}{4}\pi; -3)$. Por tanto, $a = \frac{128}{\pi^3}$.

5 puntos

3. h es diferenciable en la posición $x = \frac{3}{2}\pi$ porque $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2} - 0} h'(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2} + 0} h'(x)$
$I_g = I_h = 0$, es decir, ambas funciones de aproximación se aproximan a f exactamente en la manera descrita.
Discusión de curva: La propuesta no es adecuada como

medida de calidad. Para cada *a* se cumple: $\int_{\pi}^{2\pi}(f(x)-g(x))dx=0$, porque los gráficos de ambas funciones *f* y *g* son simétricos al punto $P(\frac{3\pi}{2};3)$ para cada *a.* Por lo tanto, cada diferencia de dos valores de función en la posición *x* también aparece en la posición $3\pi - x$ con signos algebraicos opuestos, teniendo como resultado que la integral es cero. La misma discusión de curva se puede hacer para *h.*

7 puntos

4. Posibles medidas son, por ejemplo, $A_g = \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)-g(x)|dx$ y $M_g = \max_{\pi \le x \le 2\pi} |f(x)-g(x)|$ con las explicaciones correspondientes. Los valores numéricos concretos pueden calcularse con la ayuda de CAS.

Resultados: $A_g \approx 1,57$, $A_h \approx 0,57$, $M_g \approx 1,08$, $M_h \approx 0,34$

8 puntos

Soluciones B2, 1ª propuesta

para 1)

Descripción del recorrrido y las características de h:

$D_h = \{x \in \Re; x \neq 7\}$

$W_h = \{y \in \Re; y \geq -\frac{1}{4}\}$

$N(6/0); T(-5/-\frac{1}{4}); W(-4/-\frac{2}{9})$

asíntota horizontal: y = 0

asíntota ortográfica: x = 7

Puntos de intersección S_1=N; S_2(6,276/0,525); S_3(8,221/1,490)

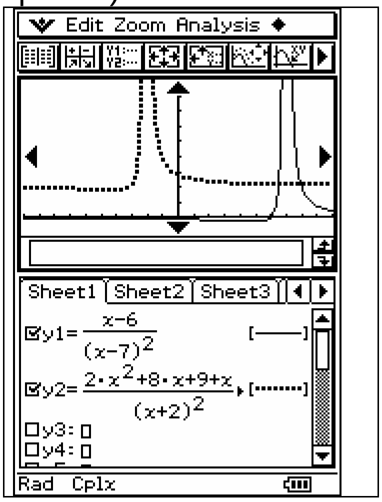
5 puntos

para 2)

Formulación y resultado: $\int_{8,25}^{10} (f_1(x) - h(x))dx \approx 1{,}74 u.s.$

2 puntos

para 3)



$$h(x) = \frac{x-6}{(x-7)^2} = \frac{(x-7)+1}{(x-7)^2} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{(x-7)^2}$$

$$g(x) = \frac{2x^2+8x+9}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2\cdot(x+2)^2+1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} = 2 + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}$$

$\Rightarrow h(x+9)+2 = g(x)$

El gráfico de g puede, por tanto, obtenerse del gráfico de h desplazándolo aproximadamente 2 en la dirección y unos -9 en la dirección x.

4 puntos

para 4)

Pendiente de la tangente en P: h'(6) = 1

Ecuación: x - 6 = h(x)

Solución: S(8/2)

3 puntos

para 5)

Formule y demuestre $h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot (x-6+n)}{(x-7)^{n+2}}$

5 puntos

para 6) Demostración con pendiente $f'_t(6)=\infty$ para toda t > 0

ángulo de 45°, como h'(6) = 1.

Sistema de ecuaciones $I \quad t\sqrt{x-6}=\frac{x-6}{(x-7)^2}$

$$II \quad \frac{t}{2\sqrt{x-6}}\cdot\frac{-x+5}{(x-7)^3}=-1$$

Solución: t = 1,21492 (x = 8,09097)

También puede encontrarse la solución mediante experimentación

. 6 puntos

Comentario: Debe quedar claro para el alumno si es suficiente dar la solución, o si debe demostrarse que sólo existe una solución.

<u>Esquema de solución del **ejercicio C1 - Álgebra Lineal / Geometría Analítica**</u>

a) Cuboide ***Q1***: $a=\overline{AB}=30$ y $b=\overline{AD}=15$ y de V = 27. 000 resulta $c_1=\overline{AE_1}=60$

Cuboide ***Q2***: De $a\cdot b\cdot c_2 = 2\cdot(a\cdot b + a\cdot c_2 + b\cdot c_2)$ resulta $c_2 = 2{,}5$ y {V}={A_o}=1125

5 puntos

b) De $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AE_1}$ y $\overline{AE_1}=60$ resulta, por ejemplo, E_1(22; 20; 70) , así como ulteriormente F_1(42; 40; 60), G_1(52; 29; 58) y H_1(32; 9; 68)

$\overrightarrow{n_{xy}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, por ejemplo, es un vector normal del plano de coordenadas x-y y los vectores normales de las áreas laterales del cuboide pueden representarse mediante los vectores de las aristas $\overrightarrow{AE_1}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}$**.** Con la ayuda de tres productos escalares de $\overrightarrow{n_{xy}}$ con

$\overrightarrow{AE_1}$ o $\overrightarrow{AD}$, respectivamente, y $\overrightarrow{AB}$ obtenemos cos $\alpha_1 = {}^{14}/_{15}$, cos $\alpha_2 = {}^{2}/_{15}$ y cos $\alpha_3 = {}^{1}/_{3}$ y por tanto $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$.

7 puntos

c) (1) La línea recta **g** es paralela al plano **ε** y, por tanto, no tiene ningún punto común con él : **g** ∩ **ε** = { }

(2) **ε:= ε**$_{ABC}$ $5x + 2y + 14z = 230$

Los casos **g** ∩ **ε** ≠{ } significan que o hay exactamente un punto de intersección o, por el contrario, puede haber infinitos puntos de intersección.

Introduciendo los correspondientes valores, se obtiene $2 \cdot (k^2\text{-}100)\cdot t = -5 \cdot (k - 10)$

$|k| \neq 10$: Solución única con $t_S = -\dfrac{5}{2k+20}$; introduciendo los valores se obtienen las coordenadas del punto de intersección

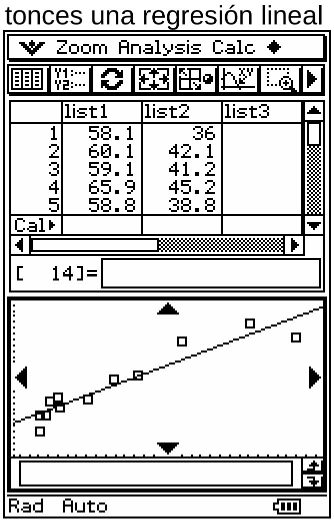
$k = 10$: La línea recta **g** es un subconjunto real del plano **ε.**

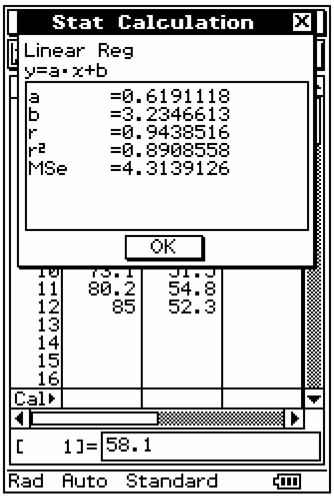
[Comentario: Para k = -10 se da el caso (1) .]

8 puntos

Soluciones C2, 1ª propuesta

1. Los valores dados se introducen en la calculadora, la cual hace entonces una regresión lineal





La ecuación de la recta de regresión es (1) $y = 0{,}62 \cdot x + 3{,}235$
.

De los datos dados en el ejercicio (votantes que cambian el sentido del voto – p, q) resulta que es válido $y_i = x_i \cdot \frac{100 - p}{100} + (100 - x_i) \cdot \frac{q}{100}$. Las transformaciones tienen como resultado $y_i = x_i \cdot \left(1 - \frac{p+q}{100}\right) + q$. La correlación lineal entre x_i e y_i queda por tanto demostrada. La comparación con (1) conduce a $q = 3{,}2\%$ y $p = 34{,}8\%$.
Como control se elige un punto cercano a la recta, como por ejemplo, (68,5; 45,6). Así se obtiene $68{,}5 \cdot \frac{100 - 34{,}8}{100} + (100 - 68{,}5) \cdot \frac{3{,}2}{100} = 45{,}67$. ¡Buena confirmación!

6 puntos

2.1 Con una probabilidad de $\frac{627}{1043}$ se extrajo una bola negra de la urna 1.

1 punto

2.2 Primer error posible: se elige la urna 1, se extrae una bola blanca con la probabilidad $\frac{373}{1000}$ y se identifica la urna 2. Por tanto, la probabilidad de error es 0,373.
Segundo error posible: se elige la urna 2, se extrae una bola negra con la probabilidad $\frac{416}{1000}$ y se identifica la urna 1 con un error de probabilidad de 0,416.
A partir de esto, se obtiene un error total de 0,5·(0,373 + 0,416) = 0,395.

3 puntos

2.3 Se realizan 20 extracciones (con restitución). Si se eligió la urna 1, es válido lo siguiente para la variable aleatoria “X = número de bolas negras extraído“

$$P_1(X>10)=\sum_{k=11}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{627}{1000}\right)^k\cdot\left(\frac{373}{1000}\right)^{20-k}=0{,}828$$. Si se eligió la urna 2, es válido lo siguiente: $$P_2(X>10)=\sum_{k=11}^{20}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{416}{1000}\right)^k\cdot\left(\frac{584}{1000}\right)^{20-k}=0{,}161$$.

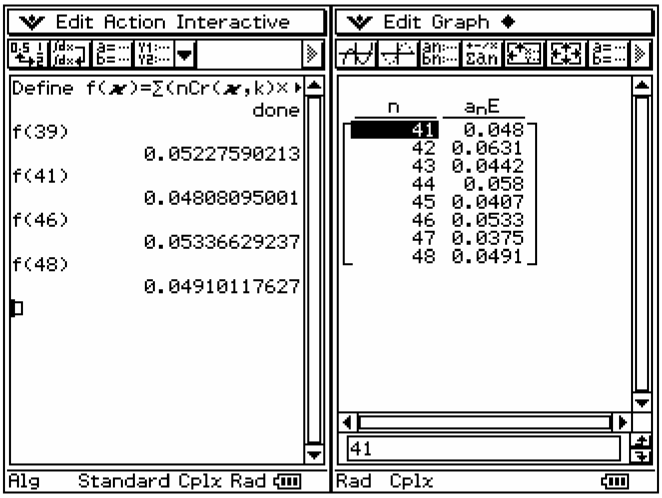
La probabilidad de error α de que se identifique la urna 2 aunque hubiera sido elegida la urna 1 es $1-0{,}828=0{,}172$.

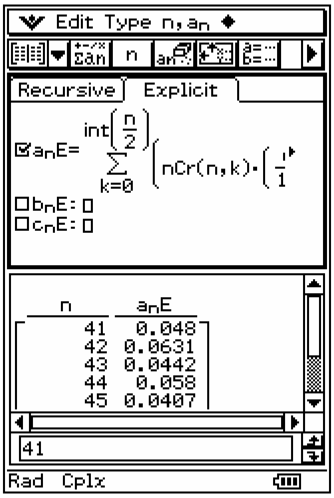
4 puntos

2.4 $P_{totalerror}=\alpha\cdot P(U_1)+\beta\cdot P(U_2)$, con lo cual los factores de las probabilidades del lado derecho son 0.5 en cada caso, puesto que ambas urnas son elegidas con la misma probabilidad (al azar). Se obtiene 0,161.

2 puntos

2.5 Es posible reducir la probabilidad de error α aumentando el número de extracciones. Si se hacen por lo menos 48 extracciones, el error de primera clase se halla por debajo del 5%.





La función f tiene la siguiente ecuación: $f(x) = \sum_{k=0}^{k=\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor} \binom{x}{k} \cdot \left(\frac{627}{1000}\right)^k \cdot \left(\frac{373}{1000}\right)^{x-k}$, y, por lo tanto, toma los valores de α.

Sin embargo, debe prestarse atención a los números impares de extracciones, así 41 son ya suficientes.

4 puntos

Soluciones c2, 2ª propuesta

1. (*Diagrama de árbol, regla de decisión, regla de la suma)*

$$p = P("ws"or"sw") = \frac{w}{n} \cdot \frac{n-w}{n-1} + \frac{n-w}{n} \cdot \frac{w}{n-1} = \frac{2w(n-w)}{n(n-1)}.$$

con n = 20 y w = 6 se obtiene: p = 42/95 ≈ 0,442

2 puntos

2. *(Resolviendo una inecuación)*
La solución de la inecuación p ≥ 0,5 es como sigue: 7 < w < 12; $w \in N$

2 puntos

Generalmente: $\frac{1}{2}(n - \sqrt{n}) \leq w \leq \frac{1}{2}(n + \sqrt{n})$

3. *(Contando en el caso de experimentos aleatorios multinivel)*

Versión 2: $P_2 = p^2 + \binom{2}{1} p^2 (1-p) = p^2 (3-2p)$

Versión3:

$$P_3 = p^3 + \binom{3}{1} p^3 (1-p) + \binom{4}{2} p^3 (1-p)^2 = p^3 (10 - 15p + 6p^2)$$

con n = 20 y w=10 se obtiene: p = 10/19 ≈ 0,526

P_2 = 3700/6859 ≈ 0,539

P_3 = ≈ 0,549

5 puntos

4. $\dfrac{2w(n-w)}{n(n-1)} = \dfrac{1}{2}$ → $0 = w^2 - nw + \dfrac{n(n-1)}{4}$ → $w_{1/2} = \dfrac{n}{2} \pm \sqrt{\dfrac{n}{4}}$

posee soluciones enteras exactamente en el caso de que n sea un cuadrado perfecto.

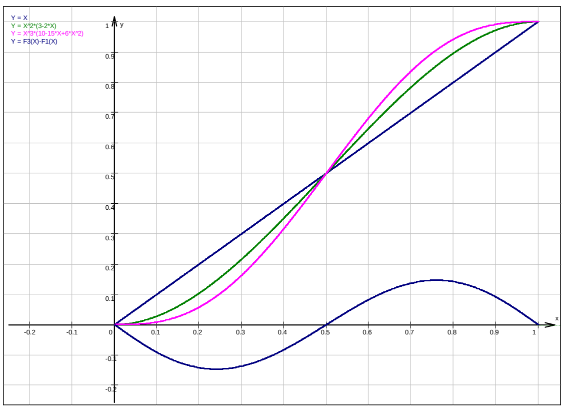
Ejemplos de solución:

n	w_1	w_2
4	1	3
9	3	6
16	6	10
25	10	15

3 puntos

5. *(Interprete y presente correlación funcional p(p); P_2(p) y P_3(p) gráficamente con ayuda de las correlaciones del ejercicio 3)*

- ❖ Interprete la igualdad para p = 0; 0,5 y 1
- ❖ Incremento de la probabilidad de victoria/derrota incrementando el número de *sets*



4 puntos

Cálculo:

$$p - p_3 = p - p^3(10 - 15p + 6p^2)$$

$$(p - p_3)' = 1 - 30p^2(1 - p)^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{30}\sqrt{30}}$$

$$p_1 \approx 0{,}7597 \text{ and } p_2 \approx 0{,}2403$$

y prueba de los extremos globales.

$$p - p_2 = p - p^2(3 - 2p)$$

$$(p - p_2)' = 1 - 6p + 6p^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$p_1 \approx 0{,}7887 \text{ y } p_2 \approx 0{,}2113$$

y prueba de los extremos globales

(Debe establecerse la relación con el ejercicio)

3 puntos

7. *(Repetición de la demostración de las correlaciones del ejercicio 5)*

1 punto

2 Grupos de trabajo

2.1 Substitución de los exámenes finales descentralizados sin CAS por un examen final centralizado con CAS

1. El uso de ordenadores en el examen final de Matemáticas. tiene lugar en un entorno que viene marcado por los cambios. Simplemente piense en el cambio del “Gymnasium“G9 al G8 (8 años en lugar de 9 antes de hacer el examen final) y de un examen final descentralizado a uno centralizado. Lo que necesitamos es un concepto de clases de matemáticas que tengan en cuenta en igual medida todos los cambios que sobrevengan.
2. Debe garantizarse un trato igualitario a los examinandos en cuyo examen final se permitan ordenadores y a aquéllos en que no. Esto puede llevarse a término mediante ejercicios similares de exámenes finales con y sin uso de ordenador o bien formulando conscientemente las preguntas de una manera totalmente diferente. Con un mismo núcleo del ejercicio, la primera versión clarifica las diferencias entre ejercicios convencionales y aquéllos que deberían ser resueltos con ordenadores. La segunda versión acentúa más el desarrollo de una nueva cultura de ejercicios.
3. A causa de la diferenciación necesaria para la presentación de los ejercicios, la funcionalidad de los diferentes tipos de herramientas (por ejemplo, calculadoras científico técnicas, calculadoras gráficas, ordenadores de mano con CAS, PCs) no debería solaparse más de lo que lo ha hecho hasta ahora. Esto significa especialmente que las calculadoras no CAS no deberían tener funcionalidades CAS.
4. El uso de ordenadores tiende a comportar la formulación más abierta de ejercicios. También para estos ejercicios, la cantidad de procesamiento debe resultar obvia para el examinando. Siempre que sea posible, debe darles una pista sobre el nivel de expectativas, si es que hay diferentes maneras de resolver un ejercicio. Las soluciones equivalentes deben ser valoradas en igual medida durante la corrección.
5. Cuando se preparan ejercicios de examen final, la manera de plantear el problema debería desempeñar siempre un papel principal. Los ejercicios de los exámenes finales deberían ser siempre formulados de manera independiente de los diferentes tipos de herramientas o

software. Las imágenes de pantalla de ordenador deberían ser evitadas en los ejercicios.

6. Las instrucciones para a la puntuación deberían ofrecer unos márgenes relativamente amplios. Eso daría a los profesores libertad en sus correcciones, de manera que pudieran tener en cuenta las clases que han impartido y las herramientas usadas durante ellas.
7. Hubo consenso en que los examinados tuvieran que demostrar en su examen final que habían sido capaces de llevar a término procedimientos matemáticos esenciales sin herramientas técnicas. Esto puede realizarse integrando ejercicios en otros más complejos, o bien valorando al examinando separadamente en una parte de los ejercicios exenta de herramientas.
8. Los exámenes finales con un componente descentralizado y otro centralizado se consideran bastante desfavorables por diversas razones.
9. Una explicación de los verbos para las órdenes de trabajo (lista de operadores) puede contribuir a una comprensión consistente de la formulación de las tareas.
10. Hay una necesidad urgente de buscar vías para asegurar la financiación de calculadoras de alta calidad para niños de familias desfavorecidas.

2.2 Preparación de profesoras y profesores

Para preparar con éxito un examen final centralizado en el cual se usen los medios modernos, es necesario no centrar el enfoque sólo en el examen final.

Es decisivo desarrollar un concepto para el uso de nuevos medios en relación con todas las demás innovaciones en la clase de Matemáticas (standards, nuevos métodos de enseñanza, G8, examen final centralizado...).

Preguntas importantes en relación con la preparación de los profesores son las siguientes:

¿Cómo pueden convencerse los profesores de que una herramienta moderna, como por ejemplo una calculadora CAS, puede ayudar al proceso cognitivo de manera razonable?

¿Qué influencia tienen los currículums, las directrices marco y los libros de texto en la preparación del correspondiente examen final centralizado?

¿Se necesitan ejercicios de ejemplo para el cambio a un examen final centralizado?

¿De qué manera pueden integrarse en el examen final centralizado ejercicios con partes importantes de modelización u otros muy orientados a aplicación?

¿Cómo se debe orientar uno a la hora de “elegir” los colegas?

Además se discutió un posible curriculum CAS. ¿Pueden aceptarse tales innovaciones?, y ¿cómo? ¿son necesarias las avaluaciones externas aleatorias?

Se decidió que una estrategia eficiente y duradera para la preparación de los profesores debería ceñirse a las siguientes tres fases, y que hay ciertos requisitos para cada una de estas fases.

1ª fase. Educación terciaria.

1. El CAS debe ser integrado en la ecuación terciaria.
2. Durante la educación didáctica especializada, debe usarse la tecnología
3. Una escuela sede de un círculo de discusión permanente – debe aspirarse a que sea una universidad– (véanse las experiencias en la Baja Sajonia)

2ª Fase Período de Prácticas

1. Uso obligatorio de CG, CAS, DGS, TK durante la educación.
2. Unidades didácticas obligatorias con CG, CAS, DGS y TK
3. Deben requerirse competencias básicas a todos los coordinadores (si es preciso, delegación de esas unidades de las prácticas a la Dirección General)

3ª Fase Profesorado

1. Estipulación de las competencias mínimas en herramientas basadas

en nuevas tecnologías
2. Formación continuada obligatoria de los departamentos en CAS, metodología educativa moderna, trabajo en proyecto, desarrollo de tareas ...
3. Proporcionar materiales adecuados y ejemplos de clases
4. Familiarización en el momento oportuno (por ejemplo, en el nivel I de Secundaria) con los operadores.

2.3 Estructura de un examen final con CAS

Las condiciones básicas están fijadas en los "Requisitos Formalizados para los Exámenes Finales de Matemáticas" (Resolución de la Conferencia de Ministros de Educación, CMC, de 1 de diciembre de 1989 y subsiguientemente de 24 mayo de 2002) y los requerimientos básicos para clases de matemáticas (incluso para el conjunto del campo de ejercicios matemático-científico-técnicos) se describen en el acuerdo para la estructuración de los Bachilleratos Superiores de 2 años ("Sekundarstufe II) (Decisión de la Conferencia de Ministros de Educación de 7 de julio de 1972 y subsiguientemente de 16 de junio de 2000).
"En el contexto del ámbito matemático-científico-técnico de ejercicios, se enseñará la comprensión de los procesos de abstracción, la capacidad de extraer conclusiones lógicas, la habilidad de desenvolverse en cálculos simples, la comprensión de la matematización de los temas, el discernimiento de las particularidades de los métodos científicos, del desarrollo de presentaciones de modelos y sus aplicaciones a la naturaleza viva y no viva, y de la función de las teorías científicas".
Además, debe destacarse la contribución especial e indispensable de las clases de Matemáticas a la educación general y a la capacidad para cursar estudios universitarios. La función educativa general de las clases de Matemáticas queda patente de manera especial al posibilitar las siguientes experiencias básicas (según M. Winter):

- La Matemáticas como sistema deductivo de objetos abstractos, con un grado máximo de interrelación interna, así como de apertura a nuevas creaciones, nuevos órdenes y relaciones (las Matemáticas como ciencia formal),[6]

[6] Este objetivo abstracto no puede ser conseguido en la escuela; en el nivel de abstracción se describe un objetivo de una carrera universitaria. En esta experiencia básica

- Las Matemáticas como una gran reserva de modelos, aplicable a la interpretación de los fenómenos del mundo de manera racional (las Matemáticas como un a ciencia aplicable),
- Las Matemáticas como una oportunidad ideal de ejercitación para mejorar las capacidades de solución de problemas generales (las Matemáticas como medio para formar capacidades heurísticas).

Las Matemáticas contribuyen de manera indispensable a la realización de la tarea educativa del Bachillerato superior (dos últimos años de secundaria), la cual supone combinar una profundización en la educación general, junto a una propedéutica científica y una capacidad de estudio a nivel universitario.

Las nuevas tecnologías pueden sentar la base para la comprensión básica de las cuestiones matemáticas mediante visualizaciones dinámicas, pueden utilizarse como una herramienta eficiente para construir modelos y simulaciones y pueden estimular los métodos que funcionan de manera heurístico-experimental.
El objetivo debería ser que el examinando descubriera por sí mismo si tal herramienta tiene sentido y es útil, y cuándo.

Hubo consenso en que la estructura del examen final no debe ser cambiada en lo esencial cuando se introducen nuevas tecnologías. Por descontado debe asegurarse, tras la citada introducción, que las relaciones entre los requisitos permanecen inalteradas por lo que se refiere a los Requisitos Normalizados de Exámenes (EPA).

Las tres siguientes áreas siguen teniendo un interés central:
- **El Análisis,** como base de los conceptos y procedimientos matemáticos para describir las dependencias y los procesos cambiantes[7]
- **Álgebra Lineal/Geometría Analítica**, con sus métodos para la "algebraización" de los objetos y para la descripción analítica del espacio,
- **la Estocástica,** con la posibilidad de una descripción cuantitativa de los

---

se trata sobre todo de una reducción didáctica razonable en la escuela.

[7] La experiencia demuestra que esta materia es la que más cambios debe sufrir. En el pasado, eran escogidas por la comisión de elaboración de exámenes las ecuaciones que podían resolverse de manera elemental. Esta restricción ya no existe con el uso de calculadoras CG/CAS. En definitiva, las cuestiones creativas y exploratorias son más y mejor consideradas

procesos que dependen del azar y la posibilidad de interpretar datos.

Durante la discusión quedó claro que existen opiniones diferentes por lo que respecta a la función de las clases de Matemáticas en la educación general, más precisamente por lo que se refiere a la amplitud y profundidad de enseñanza de las tres materias. Como sólo una pequeña proporción de los bachilleres estudia Matemáticas o materias con un fuerte componente matemático, surge la cuestión de si las citadas materias deberían ser explicadas desde un punto de vista más general (abanico amplio), o bien si tiene sentido una consolidación a expensas de otra o parte de otra de las tres materias. Naturalmente, esta decisión tiene consecuencias directas sobre la estructura de un examen final, independientemente de si se permite o no una calculadora gráfica o una CAS.

La capacidad de aplicar conceptos y métodos matemáticos para resolver problemas intra y extramatemáticos requiere, junto a un sólido conocimiento básico, seguridad al reconocer y al utilizar relaciones de contenidos y procesos matemáticos, así como la competencia para entender y resolver autónomamente. La comprensión de los conceptos centrales y de los procedimientos de resolución de problemas es tan importante como el manejo de símbolos y cálculos.

Aquí se suscita la cuestión de si en un examen final el conocimiento básico se examina separadamente. Si así fuera, sería consecuente que esa tarea se relizara totalmente sin herramientas de ayuda. Ello no plantea problemas de ejecución, ya que tal ejercicio podría colocarse al principio del examen. El examinando puede entregarlo después de un cierto tiempo, que quedaría a su arbitrio. Las experiencias en Baden-Württemberg en dos promociones de examinandos del examen final son ,e en este sentido, mayoritariamente positivas. Los problemas surgían más bien con los Buenos examinandos, que perdían puntos con errores por descuidos. La preparación la hace el mismo alumno; no hay una preparación intensiva en clase.
Las opiniones sobre si integrar o no una pregunta de examen sin herramientas varían mucho
Un argumento a favor de tal ejercicio es que examinandos sin una muy Buena capacidad de cálculo pueden obtener un resultado aceptable.
Naturalmente es posible evitar una partición de . un ejercicio integrando las preguntas básicas en otros ejercicios.

Una decisión sobre esta cuestión parece precipitada. Parece recomendable esperar el desarrollo futuro.

.Los ejercicios de los exámenes finales requieren clases enfocadas al desarrollo de un conocimiento básico adecuado de los conceptos y métodos importantes en las tres áreas y que se orientan a las ideas fundamentales.

Las competencias que se exigen en el examen final se basan en clases de Matemáticas que cumplen con los mencionados requisitos metodológicos y propios de la especialidad.

Esto significa en particular que, además de las capacidades para usar conceptos y procedimientos, también resulta de gran importancia la comprensión de cómo llegar a os conceptos y postulados cruciales

De igual manera es importante ser capaces de describir y argumentar la solución de problemas. Para asegurar esas competencias de manera efectiva y en la extensión requerida, los ejercicios del examen final deben, asimismo, sacar a colación campos de problemas vinculados y ofrecer posibilidades de establecer relaciones y presentar diferentes soluciones. En breve, las tareas deben ser presentadas de una forma más abierta.

Debe llegarse a varios compromisos en lo que respecta a ejercicios de examen..

La cuestión de si en Análisis debería comenzarse, por ejemplo, con un problema de modelización o con un análisis de curva, todavía no tiene respuesta. Ambas posibilidades tienen sentido.

La apertura de una pregunta de examen no puede ser arbitraria. Debe resulta obvio para el examinanado qué se espera en la respuesta. La cantidad de desarrollo puede estimarse, por ejemplo, en función de la puntuación del ejercicio.

Las mismas reflexiones son válidas para la orientación de la aplicación.

Y, finalmente, debe buscarse un equilibrio razonable entre los requerimientos de cálculo formal, la evaluación de la comprensión de conceptos y la capacidad de resolver problemas.

Se propusieron en varias ocasiones las preguntas de desarrollo escrito (“redacción matemática”) como ejercicios alternativos, para lo cual debería alcanzarse previamente un consenso pragmático sobre los criterios de valoración. Un ejercicio como “Describa los impactos de los parámetros a y b sobre la forma del gráfico de la función *f* con $f(x) = x^3 + ax + b$ (en un ensayo matemático) y pruebe su afirmación“ permite un uso razonable de CG/CAS sin trivialización.

3 Elaborando los ejercicios de los exámenes
3.1 Análisis del grupo de trabajo

En primer lugar, el señor Hummel presentó los ejercicios con CAS de los exámenes finales de 2001-2004 , elaborados por el grupo TI en Baden-Württemberg, así como el ejercicio centralizado del examen final, formulado para todos los ordenadores CAS, por primera vez en 2005. En relación con ello, también se discutió cómo se preparan y desarrollan los ejercicios de los exámenes finales en los diferentes *Länder* alemanes.

A partir de ahí, se mostró cómo los ejercicios habían cambiado a lo largo de los años, desde ejercicios más bien esquemáticos, que sólo contenían tipos de funciones más complejos, hasta tareas orientadas a aplicaciones y con preguntas formuladas de manera más abierta.

Las diferentes posiciones representadas en la siguiente discusión pueden ser formuladas como tesis. Que deberían ser trenidas en consideración en las correspondientes tareas:

- Los ejercicios de los exámenes finales con uso de ordenador deben contener también tareas sencillas, especialmente al principio. Deberían corresponder al ámbito de requerimientos I o bien en la transición entre el I y el II.
- La discusión de curvas esquemática desaparecerá cada vez más; tomarán su lugar elementos de discusión de curvas en contextos concretos de aplicaciones.
- La adaptación de las tareas a CAS no puede ser realizada simplemente usando funciones mucho más complejas sin cambiar las preguntas. El grupo rechaza decididamente este aumento de dificultad en los ejercicios.
- El uso de CAS no significa necesariamente términos de función complejos, se requiere además la habilidad del alumno para elegir la herramienta correspondiente a la pregunta (tablas, gráficos, soluciones, algebraicas…) y contestar la pregunta con la ayuda de la herramienta.
- Se debería aspirar a la modelización de un problema y a la subsiguiente revisión del modelo (intra-) matemática y orientado al problema.
- Son precisamente las herramientas empleadas las que permiten

preguntas más abiertas Por eso debería tener lugar un cambio prudente de preguntas esquemáticas a otras formuladas más abiertamente.

- Las preguntas abiertas se presentan en oposición a un horizonte de expectativas explicitado muy detalladamente.
- La evaluación del grado de dificultad de los ejercicios depende en gran manera de lo que se ha explicado en clase ,así como a su clasificación en la escala de niveles EPA .
- No existe un prototipo de ejercicio CAS, la cuestión surge de la inevitablemente cambiante situación de la clase.
- En algunos estados alemanes, se suscitan dificultades derivadas del hecho de que deben formularse esencialmente las mismas preguntas, independientemente de que se usen o no calculadoras CAS.

Después de estas reflexiones básicas, el grupo trabajó sobre una propuesta de tarea que fue proporcionada por el Sr. Mr. Weitendorf. Él la había preparado originalmente para ser utilizado en un examen sin uso de CAS.

En la valoración de esta tarea deberían ser tenidos en consideración los siguientes aspectos:

- El tiempo para rehacer la tarea era muy limitado. Por eso solo pudieron elaborarse los puntos básicos.

  Se trata de una tarea independiente, no ligada a ninguna otra de un conjunto que forme parte de un examen final. Sólo puede contemplarse de manera global hasta qué punto tendría sentido una modelización en la parte de Análisis, si se diera el caso de que el examinando ya hubiera tenido que modelizar de manera intensiva en las otras dos partes, Estocástica y Álgebra Lineal/Geometría Analítica.

Concepto de ejercicio:

La siguiente tabla muestra el consumo total de petróleo entre 1880 1925 en millones de toneladas.

Año	1880	1890	1900	1905	1910	1915	1920	1925
Consumo	30	77	149	215	328	432	689	1069

a) Grafique los datos. Dé una función exponencial que describa el consumo mundial de petróleo entre 1880 y 1925, y determine el consumo total entre 1880 y 1925. ¿Cuál fue el consumo en 2000?

Intención: En primer lugar los datos se graficarán y se describirán funcionalmente. Después se formulan preguntas rutinarias sobre la técnica de cálculo con un carácter de transferencia bajo. Las preguntas sobre técnicas de cálculo en un contexto concreto simplificarán el principio incluso a los alumnos con menos capacidad. El intervalo temporal de los datos correspondiente al pasado permite comparar el pronóstico de a), después en c), con el consumo en 2000, y explicar la desviación.

b) ¿Cuáles son las características del crecimiento exponencial? Dé y explique tres rezones por las cuales el crecimiento exponencial no puede ser usado en pronósticos a largo plazo referentes al consumo mundial de petróleo.

Intención: para simplificar el principio, el conocimiento de los hechos se examina primero, lo cual es después aplicado a la descripción de la parte a). La formulación dada debe ser evaluada matemáticamente, así como en desde el contexto.

c) El consumo real de petróleo en 2000 fue de tres mil millones de toneladas. Las reservas disponibles en esa época y económicamente refinables se estimaron en 150 mil millones de toneladas. ¿Cuanto durarán las reservas si se parte de un consumo anual del 3 % ?

¿A qué ritmo de modificación anual durarían las reservas otros 65 años? Explique su resultado.

Intención:

Al principio no lo teníamos todo claro en cuanto a las cifras al elaborar la tarea. Probablemente no son correctas. Además, en el ejercicio original, los barriles y las toneladas como unidades de medida estaban mezclados.

Una vez más, esta parte representa un comienzo sencillo con hipótesis de

modelo muy simplificadas. Después se plantea una pregunta sobre el pronóstico futuro que conduce a una ecuación difícil, la cual no puede ser resuelta de manera elemental. El alumno podría resolver el ejercicio bien de manera exacta con ayuda de una serie geométrica, y su fórmula de suma – realizable fácilmente con CAS –, o bien aproximada, con ayuda de una integración. Mientras que en la parte a) los valores discretos y su aproximación no son cruciales para resolver la pregunta, aquí hay la posibilidad de discutir la debilidad básica de la primera modelización.
Dependiendo de la formulación, resulta una ecuación de grado 66 (!) , que no puede ser resuelta de manera fácil por las calculadoras CAS usadas habitualmente.
Aquí el alumno debe ser capaz de usar la herramienta de manera orientada a un objetivo, por ejemplo experimentando con otros porcentajes, o bien puede encontrar una solución con la ayuda de las funciones de la tabla del CAS. Para ello se necesita una manera de pensar creativa. Finalmente debe explicarse el resultado encontrado. De hecho, el consumo de energía debe (naturalmente!) ser reducido. Somos conscientes de que no tiene por qué esperarse una acción así de un alumno en situación de examen. Debe conocer esas dificultades a partir de ejercicios similares en clase. . Además, debe saber que también una formulación "experimental" lleva a una solución adecuada, y, por tanto, evaluada positivamente. Y debe saber también que puede documentar intentos fallidos, que en algunas circunstancias serían valorados.

Tiempo necesario:

		Minutos	Puntos
a)	Representación gráfica de los datos	8	
	Dar la función exponencial	4	
	Determinación del consumo total por integración	6	
	Cálculo del consumo en 2000	2	
b)	Caracterización del crecimiento exponencial, dando y explicando las razones	20	
c)	Determinación de la función de crecimiento, cálculc del tiempo	10	
	Determinación del índice de modificación (aprox. · 1%), Explicación como decrecimiento	10	
		60	

Sólo hemos estimado la necesidad de tiempo para el mero cálculo y para reflexionar sobre el cálculo a elegir. Para calcular una nota, primero sería necesaria una transformación en puntos, la cual, efectivamente, podaría estar orientarse por los tiempos estimados, pero diferiría de estado a estado. Éstas son las razones por las que hemos renunciado a hacer una propuesta de evaluación completa. No quedó claro en la discusión hasta qué punto podría ser útil aquí un detallado horizonte de expectativas.

3.2 Grup de trabajo Geometría Analítica/Álgebra Lineal

1. Consideraciones generales

Se pide a los ministerios de los estados federados que adapten los marcos curriculares y los currículums válidos en los diferentes estados alemanes a los Requerimientos de Exámenes Normalizados (EPA).

Sería recomendable adoptar en la planificación de los exámenes finales lo siguiente:
Se estipula un énfasis temático (para cada área) a su debido tiempo para cada grupo de edad, por ejemplo, antes de que los alumnos entren en la fase de calificación.

Así puede asegurarse una adecuada variedad de tareas, también a largo plazo.

2. Puntos fundamentales relativos al uso de ordenadores

Con la material Geometría Analítica/Álgebra Lineal, los requerimientos pueden ceñirse a tres contenidos alternativos con el concepto de vectores como base.

- *Geometría analítica vectorial*
- *Uso de matrices y mapeados*
- *Uso de matrices con procesos multinivel*

¿Qué comoporta el uso de ordenadores en Álgebra Lineal/Geometría Analítica?

- Menos cálculo irreflexivo (por ejemplo, con sistemas de ecuaciones lineales) y, por tanto, una ganancia de tiempo.

- Son posibles aplicaciones más realistas.

- Posibilidades de visualización en IR^2 , IR^3.

Posibilidades de tratar temas complejos

- Se simplifican los enlaces con otras áreas (Análisis y Estocástica)

- Tratamiento profundizado de cuestiones conectadas con sistemas de ecuaciones lineales.

- Comprensión más profunda de los algoritmos de Álgebra Lineal.

- Métodos diversificados gracias al refuerzo en la integración de la investigación, el descubrimiento, la exposición de los problemas y la demostración.

- Una mayor variedad de ejercicios en clase, en los exámenes y en el examen final

Eso significa huir del

- Cálculo irreflexivo y

- La sobredimensión de las tareas por pasos dentro de la Geometría Analítica en la forma clásica.

Y en su lugar ir hacia

- Un uso continuo de matrices como herramienta para las cuestiones teóricas en Álgebra Lineal y en ejercicios de aplicaciones.

- Cuestiones orientadas a problemas del área de aplicación de las matrices y sistemas de ecuaciones lineales,

- Una formulación de preguntas orientada a la práctica con la solución de sistemas de ecuaciones lineales (algoritmos, problemas de cálculo, procedimientos de aproximación),

- Tareas diversificadas de diferentes áreas,

- Tomar más en cuenta el trabajo experimental,

- Interrelaciones razonables entre los diferentes “cajones“ de las materias de aprendizaje tradicionales y

- Experimentar, variar, aprender a ver, clasificar localmente y hacer preguntas.

3. Aspectos matemáticos especiales

Respecto a los Requisitos de Exámenes Normalizados (EPA), se pueden señalar (sin que ello signifique la totalidad) los siguientes aspectos matemáticos especiales de cara a encontrar tareas del campo Álgebra Lineal/Geometría Analítica:

<u>Cuestiones sobre las ideas básicas del Álgebra Vectorial</u>

- Examen de vectores por lo que respecta a su dependencia o independencia lineal
- Extracción de conclusiones a partir de la dependencia o independencia lineal
- Sistemas generadores, base, dimensión , por ejemplo en conexión con los cuadrados mágicos
- Utilización del producto escalar y vectorial – *aquí CAS tiene sentido y es útil*

<u>Ejercicios sobre Geometría Analítica</u>

- Determinación de ecuaciones de rectas o ecuaciones de planos en forma normal o paramétrica con ayuda de puntos dados o puntos que han de ser calculados,

- Vectores y vectores normales
- Determinación de puntos, líneas rectas o planos y figuras, campos formados de ellas,
- Condiciones geométricas más bien complejas,
- Determinación de intersecciones, también con inclusión de haces – *con los haces CAS resulta muy útil,*
- Examen del paralelismo, ortogonalidad, ángulos de intersección
- Círculos y esferas,
- Tangentes o planos tangenciales y problema de la intersección

<u>Interrelaciones con el Análisis</u>

- Problemas de distancias y desplazamientos – *aquí CAS tiene sentido y es necesario*
- Secciones cónicas – *aquí CAS tiene sentido y es necesario*
- Presentación paramétrica de curvas – *aquí CAS tiene sentido y es necesario*
- Reflexión de conjuntos de puntos arbitrarios (curvas) – *aquí CAS tiene sentido y es necesario*
- Loci – *aquí CAS tiene sentido y es necesario*

<u>Ejercicios sobre sistemas de ecuaciones</u>

- Determinación de conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales dados.
- Estrategias para resolver sistemas de ecuaciones lineales
- Análisis generales sobre la posibilidad de solución de sistemas de ecuaciones lineales
- Aplicación de sistemas de ecuaciones lineales como por ejemplo electricidad en la red o equilibrio de componentes invariables
- Aspectos algorítmicos y numéricos
- Procesos de aproximación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales
- Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones o sus conjuntos de soluciones

<u>Ejercicios sobre mapeado</u>

- Examen de gráficos lineales por lo que concierne a sus características
- Determinación de gráficos con características dadas

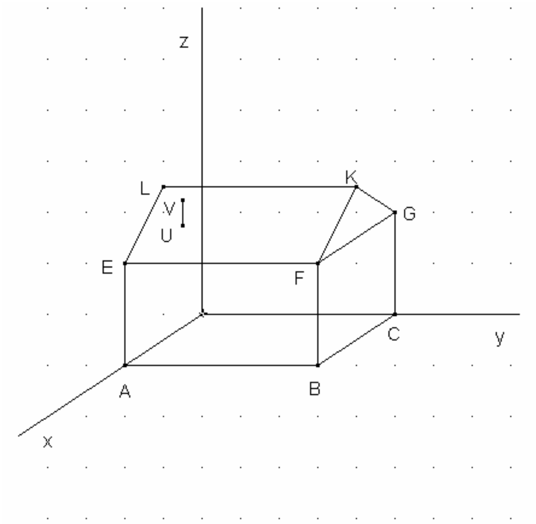
- Los mapeados sirven para determinar y analizar los conjuntos de puntos
- Análisis de estructura de gráficos

Ejercicios sobre matrices

- Entrelazado/interconexión de material
- Problemas de listas de empaquetamiento
- Codificación y decodificación
- Análisis de Entrada/Salida
- Desarrollo de la población y comportamiento cíclico
- Matrices estocásticas
- Matrices en el cálculo de Probabilidad
- Geometría de las matrices

4. Ejemplos de ejercicios

4.1 Por casa, materia básica



La casa de la familia M. tiene como medidas longitudinales 8, 10 y 4 unidades, reposando las tres aristas sobre los ejes de coordenadas. El tejado a dos aguas tiene una altura de 2 unidades, reposando el punto K sobre el centro de la arista FG.

Un vértice de la casa se encuentra en el origen del sistema de coordenadas; además A(8/0/0), C(0/10/0) y H(0/0/4) son vértices de la casa.

a) Determine las coordenadas de los otros vértices.

b) En el sótano de la casa, se pasará una tubería de servicio recta nueva entre el punto M (6/10/-1) y el punto N(-4/28/-3).
¿Resulta intersectada la tubería del jardín, que podemos describir mediante la ecuación $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

c) Una antena en el tejado EFKL tiene los vértices U(6/2/5) y V(6/2/6). Si sobre la antena cae luz del sol paralela en la dirección del vector $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, proyecta su sombra en la zona del tejado.

Calcule el punto de sombra de la punta de la antena en el tejado así como la longitud de la sombra de la antena sobre el tejado.

d) ¿En qué lugar del cielo se encuentra el sol en este caso? Determine el ángulo que construyen los rayos del sol y el plano x-y.

e) El señor M. está de pie en el jardín delante de su casa. Su nivel visual lo describe el punto P(26/3/2) y mira la superficie de la casa ABFE. ¿Puede ver por encima de la casa la parte superior T(-658/4/158) de una torre de televisión cercana? Argumente su decisión.

Esquema de solución

a) Determinación de las coordenadas del punto

b) Ecuación de recta a través de dos puntos MN: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$

El cálculo del punto de intersección con la calculadora muestra: S(1/19/-2).

c) Línea recta de la luz del sol a través de la parte superior de la antena : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

Plano del tejado EFKL: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

El punto de la sombra como punto de intersección del plano y la recta en S(7/6/4,5)

Longitud de la sombra $|US| = \sqrt{17,5}$

d) Dos formulaciones son posibles
- el ángulo entre $\vec{v}$ y su sombra en el plano x-y
- el ángulo entre $\vec{v}$ y el vector normal del plano x-y

α = 20^0

e) Plano de la casa adecuado a través de, por ejemplo,. ABKL E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Recta PT: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -684 \\ 1 \\ 156 \end{pmatrix}$, punto de intersección con $\alpha = \frac{91}{300}, \beta = \frac{6}{5}, \gamma = \frac{1}{30}$

con $\beta > 1$ el punto de intersección queda fuera de la superficie de la casa. Son posibles vías alternativas de solución del problema.

4.2 Ejercicio “trayectorias de vuelo”, materia básica[1]

Imaginamos un sistema de coordenadas con las siguientes direcciones y con su origen en la torre central del aeropuerto de Frankfurt.
x positiva – dirección Sur
y positiva – dirección Este
z positiva – dirección hacia arriba.
Sea la longitud de una unidad : 10 m.
En este sistema “la Pista Norte“es descrita por la siguiente ecuación de recta: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ -140 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \ con \ 0 \le \alpha \le 18$

a) Indique y pruebe la altura de la torre central sobre el terreno plano del aeropuerto y de la longitud de la “Pista Norte”

Describa la “Pista Sur” de la misma manera, la cual discurre en paralelo a la “Pista Norte”, 500 metros más al sur, con su misma longitud, pero empieza 200 m más al oeste que la “Pista Norte”.

La “Pista Oeste” discurre en un ángulo de 45° respecto a la dirección de la “Pista Norte”, en dirección sudoeste; empieza 400m al oeste del extremo occidental de la “Pista Norte” y tiene una longitud de 4000 m.

Explique en cada caso sus reflexiones sobre la determinación de las correspondientes ecuaciones.

b) Un avión, en la maniobra de aproximación de aterrizaje sobre la “Pista Norte” se mueve sobre la línea siguiente:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 500 \\ 96 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $con\ \ \beta \in \mathrm{IR}$. Compruebe si el piloto aterriza sobre la pista con un ángulo no superior a 20°, porque de ot ra manera el tren de aterrizaje padecería en exceso.

c) Un avión deportivo entra por error en el espacio aéreo del aeropuerto. El radar de la torre registra el avión en vuelo rectilíneo en el instante t = 0 en el punto (11; 280; 21) y un segundo después en el punto (5; 265; 21).

Compruebe el peligro de colisión con el avión de la parte b).

d) Un funcionario de seguridad quiere avisar al piloto del avión deportivo y dispara una bengala desde la torre en el instante t = 0, también. La trayectoria de la bengala se describe mediante $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15t \\ 15\sqrt{3}\,t - 5t^2 \end{pmatrix}$, indicando t el tiempo en segundos. Juzgue si el piloto del avión deportivo es capaz de percibir la bengala a una distancia visual de 1100 m.

Esquema de solución

a) Determinar que la altura de la torre es 40 m. y la longitud de la pista 3600m.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ -160 \\ -4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ $con\ \ 0 \le \gamma \le 18$ para la Pista Sur

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}20\\-180\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\ con\ \ 0\le\mu\le 200\sqrt{2}$$ para la Pista Oeste

b) Demostrar el punto de intersección de la trayectoria de aterrizaje y la pista para el parámetro $\alpha=17$ y el ángulo de intersección 18,43°.

c) Trayectoria de aterrizaje del avión deportivo: $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\280\\21\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-6\\-15\\0\end{pmatrix}$

Para juzgar el peligro de una colisión, deberían permitirse aquí dos posibilidades:

Calcule d = 68,2 m. como la distancia de las rectas agónicas, o bien d = 1273 m. como la distancia mínima de los dos objetos volantes.

d) Considere el cálculo de la distancia entre avión y bengala como objetos puntuales dependientes del tiempo.

$$abst(t)=\sqrt{25t^4-150\sqrt{3}t^3+1821t^2-6t\left(2822+105\sqrt{3}\right)+78962}$$

Determine el mínimo de 1097 m de la función distancia a t = 6,47 s.

Calcule 5,34s. como tiempo de vuelo de la bengala con

$$fldrak(t)=t^3-3\sqrt{3}t^2-4$$

(El tiempo de vuelo es el tiempo de trayectoria de la bengala hasta que aterriza en el plano x-y plano)

Calcule el mínimo local?/mínimo límite? 1242 en el intervalo de la duración del vuelo.

Conclusión: No puede verse la bengala.

4.3 Cuadrados mágicos (subtarea)

Dado un cuadrado mágico con los números 1 - 9.

a) Si es posible, determine todos los cuadrados mágicos de este tipo y argumente su solución.

b) Muestre que para un cuadrado de nueve, 3 es la suma más pequeña si puede excluirse el cero como suma y si sólo se usan números reales

Muestre que hay cuatro de estos cuadrados básicos y muestre las interrelaciones entre ellos.

c) Presente un cuadrado mágico de la parte a) en forma de una combinación lineal de los cuadrados básicos de la parte b).

En los dos siguientes ejercicios hemos tratado de relacionar dos aspectos matemáticos especiales al plantearlos. Fracasamos en ambos ejercicios, en el sentido de que hubiera resultado una tarea monolítica. El equipo considera que básicamente es imposible.

4.4 Ejercicio clásico (en dos partes), más bien materia de especialidad, sin primera parte; materia básica

a) Dados dos vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

Determine los valores p y q$\in$ IR de manera que los vectores $\vec{f}$ y $\vec{g}$, con
$\vec{f} = \vec{a} + p \cdot \vec{b}$ y $\vec{g} = \vec{a} + q \cdot \vec{b}$ sean ortogonales entre ellos; explique su idea de solución.

Para el siguiente ejercicio se dan las rectas

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2t^2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad y \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \quad con\ \lambda, \mu, t \in IR$$

así como los puntos A (6 / -1 / -1), B (5 / 2 / -3) y C (10 / -4 / -2).

b) Analice cómo las rectas se encuentran situadas una respecto de la otra en dependencia de $t \in IR$.

c) Determine una ecuación del plano E_1 que contenga las rectas h and g_2. Compare diferentes formas de una ecuación de plano y dé ejemplos en que sea especialmente adecuada.

d) El plano E_2 discurre a través de los puntos A, B y C. Determine la ecuación de una línea de intersección s de los planos E_1 y E_2 y el ángulo de intersección Explique su actuación para la determinación de la línea de intersección.

e) Determine $t \in IR$ de manera que la recta g_t discurra paralela a E_2.
Determine la distancia entre los dos para t = 0,5.

Comentario:

La parte a puede también estar al final de un ejercicio, ya que representa al menos el requisito II.
En las partes b y c la manera comparativa y explicativa de plantear los ejercicios debe ser tenida en cuenta. Requieren especialmente una comprensión más profunda de la formación de conceptos y competencia en los métodos. Aquí resulta claro que CAS - y también CG no deben tener una importancia especial en los ejercicios, pero que con sus uso se ahorra tiempo en clase para practicar otras competencias. Sólo los ejercicios correspondientes son también posibles en los exámenes.
También es importante, en este, contexto, mostrar a los alumnos que algunas ecuaciones pueden ser resueltas más rápido “manualmente“que usando una CAS.

4.5 Interconexión de materiales y planos, materia opcionall[8]

Dados los planos E_1, E_2 and E_3 con

$$E_1: \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \vec{x} = 576 \text{ y } E_2: \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{x} = 272 \text{ y } E_3: \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} \vec{x} = 560.$$

a) Determine cómo los tres planos están situados uno respecto del otro y determine el conjunto de puntos de los puntos comunes de los tres planos y su ecuación.
Muestre que es posible visualizar su resultado a escala en un esquema bidimensional en la sección transversal.
Calcule los valores necesarios para tal visualización y prepare el esquema a escala.

b) Las siguientes matrices muestran la interconexión de materiales entre materias primas y productos intermedios y finales en procesos

[8] Idea de H. Kramer, Gymnasium Großburgwedel

de producción dentro de una planta de producción e indican las unidades de cantidad necesarias (UC) en cada caso..

La siguiente es válida para la entrada de materias primas en productos intermedios:

$$rz = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

La siguiente es válida para la entrada de productos intermedios en productos finales:

$$ze = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Explique la noción “supuestos productos intermedios“. Analice las matrices para ver “supuestos“productos intermedios y prepare un diagrama de flechas que visualice el proceso de producción y que no tenga en cuenta supuestos productos intermedios.

c) La empresa recibe el siguiente pedido: $E_1 =$ 16 UC, $E_2 =$ 8 UC y $E_3 =$ 20 UC. Determine el correspondiente vector de demanda así como la matriz de demanda.

Dé ejemplos para clarificar la diferente importancia de los dos para la determinación de la demanda.

d) Supongamos que los datos del pedido se han perdido y, por tanto, la empresa, además del proceso de producción, sólo conoce el vector de demanda.

Analice y argumente en detalle si los datos del pedido pueden ser reconstruido.

Compruebe si su repuesta varía en caso de conocerse la matriz de demanda en lugar del vector de demanda.

Esquema de solución

a)

$$\blacksquare \begin{bmatrix} 8 & 8 & 12 \\ 16 & 8 & 16 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow kompl \qquad \begin{bmatrix} 8 & 8 & 12 \\ 16 & 8 & 16 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare\ rref(kompl) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{n}_3 = 0{,}5\ \vec{n}_1 + 1\ \vec{n}_2$

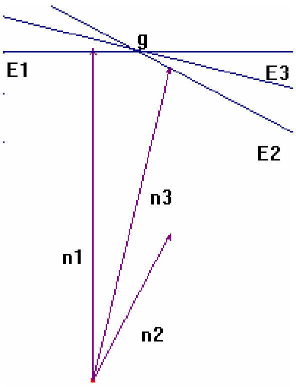
$560 = 0,5 * 576 + 1 * 272$

Como los vectores normales son coplanares, el diagrama es posible. Los planos poseen una recta común.

■ $\begin{bmatrix} 8 & 16 & 16 & 576 \\ 8 & 8 & 4 & 272 \\ 12 & 16 & 12 & 560 \end{bmatrix} \rightarrow ger \qquad \begin{bmatrix} 8 & 16 & 16 & 576 \\ 8 & 8 & 4 & 272 \\ 12 & 16 & 12 & 560 \end{bmatrix}$

■ rref(ger) $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 38 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



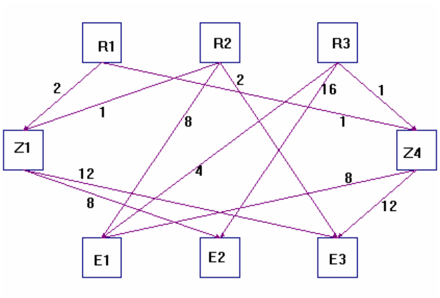
valores de los vectores normales: n_1 = 24 LU, n_2 = 12 LU, n_3 = 23,3 LU

distancia desde el origen : x_{n1} = 24 LU, x_{n2} = 22,6 LU, x_{n3} = 24 LU

ángulo $\vec{n}_1 : \vec{n}_2$: 27,3 °

Coplanaridad d e los vectores normales

b)



Supuestos productos intermedios: productos intermedios en los cuales entra una materia prima , por tanto una materia prima que se salta una fase de producción. Eso es válido para Z2 y Z3. En la represen-tación de matriz tienen sentido para permitir la multiplicación de matrices (y para evitar el procedimiento Gozinto).

c)

■ rz·ze → re $\qquad \begin{bmatrix} 8 & 16 & 16 \\ 8 & 8 & 4 \\ 12 & 16 & 12 \end{bmatrix}$

■ $\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow bestellv \qquad \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$

■ $\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow bestellm \qquad \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

■ re·bestel-lv $\qquad \begin{bmatrix} 576 \\ 272 \\ 560 \end{bmatrix}$

■ re·bestellv $\qquad \begin{bmatrix} 576 \\ 272 \\ 560 \end{bmatrix}$

■ re·bestellm $\qquad \begin{bmatrix} 128 & 128 & 320 \\ 128 & 64 & 80 \\ 192 & 128 & 240 \end{bmatrix}$

Se puede ver la demanda total. Demanda detallada de materias primas, desglosada según los productos finales (texto detallado

d) La reconstrucción no es posible con "bestellv", ya que el intento tiene como resultado el sistema de ecuaciones lineales de la parte a), que no tiene una solución definida (lo que debía ser demostrado). Con la ayuda de „bestellm"(cantidad de pedido) el pedido puede ser reconstruido fácilmente.

4.6 Curvas paramétricas[9]

Dada la parábola normal f(x) = x^2 y un punto fijo P (0 / v) en el eje de las .y.

a) Determine un conjunto de puntos de corte L desde P en proyecciones ortogonales a las tangentes a la parábola. Explique en detalle su actuación

$$\vec{l} = \frac{1}{4t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^3+2\cdot t\cdot v \\ -t^2+4t^2 v \end{pmatrix}$$ es un resultado posible.

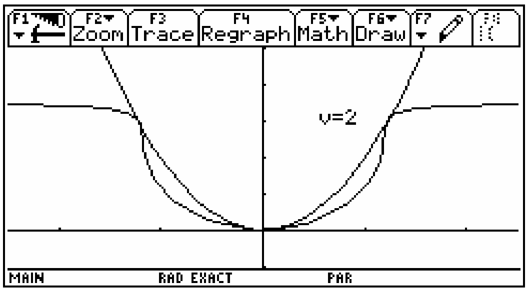
b) Clasifique los conjuntos de puntos de v ∈ IR de manera fundamentada y esboce gráficos típicos. Indique el ajuste de la ventana.

c) Describa y fundamente las modificaciones por lo que respecta a la parte b) si, en lugar del locus de puntos de corte por la proyección ortogonal L, se elige el locus de puntos reflejados S de P (0 / v) a las tangentes a la parábola.

d) Aparentemente la curva de la parte a) toca la parábola tres veces para v = 2.
Ilustre un método para examinar este supuesto y aplíquelo.

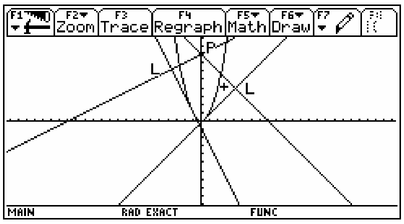
---

[9] La idea para este ejercicio ha sido extraída del artículo „Von der Normalparabel zu kubischen Kurven" , Dr. J. Meyer, Studienseminar Hameln, en mathematica didactica **21** (2), S. 84 – 108 (1998).

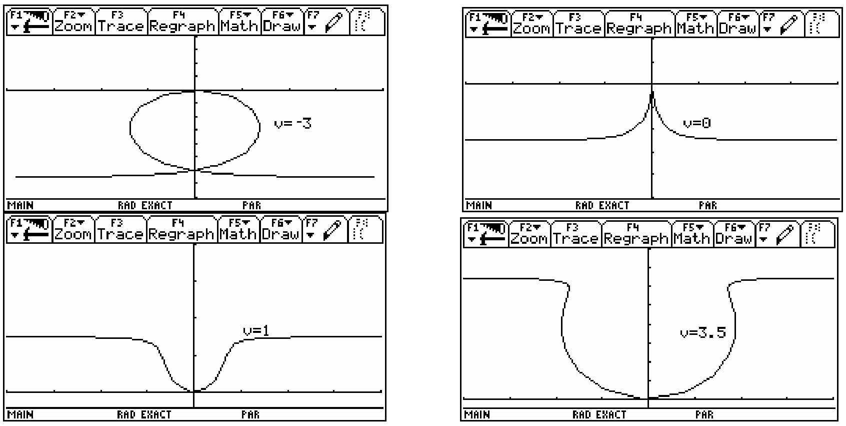


Esquema de solución

a) El vector de dirección de la tangente a la parábola discurre $\vec{r}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ y correspondientemente, el de la proyección ortogonal del punto: $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \end{pmatrix}$. Rl punto de corte está situado en la recta



La clasificación puede llevarse a cabo en primer término mediante experimentación.



En una segunda fase, sin embargo, los resultados experimentales deberían ser soportados de manera algebraica calculando los extremos, puntos dobles, puntos con tangentes verticales, puntos de inflexión, picos y ceros. Ceros: para v=0.25; Extremos: para v>0,25 mínimo, para v<0,25 máximo; Puntos de inflexión: para v>0 existen 2 puntos de inflexión para $t = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3v}$; tangentes verticales: para t < 0,2148 hay dos puntos con $t = \pm\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{16v^2 - 40v + 9} + 4v - 3}$; para v=0 se cumple $x'(t) = 0 \wedge y'(t) = 0$, es decir, hay un pico, caso especial v = 0

c) Ahora se ve que se trata de los loci de los puntos reflejados de P en la tangente, es decir su distancia se dobla. Para el examen y descripción de los cambios se pueden elegir como base los gráficos de la parte b). Se puede probar, por ejemplo, por ejemplo, con la ayuda de la formación algebraica del nuevo término $\vec{s} = \frac{1}{4t^2+1}\begin{pmatrix} 4t^3 + 4t \cdot v \\ 4t^2 \cdot v - 2t^2 - v \end{pmatrix}$.

d) Aquí, los puntos de intersección que existen para $t = \pm 0{,}5\sqrt{6} \vee t = 0$ tienen que ser determinados primero, y, en un segundo paso, deben clarificarse las características de la tangencia, y definidas de modo algebraico.

4.7 Mezcla de café, material básica

Dos fabricantes producen dos mezclas de café diferente, que se hacen la competencia, M1 y M2. La tendencia actual al cambio de una mezcla a otra por parte de los consumidores la describe la matriz

$$P = \begin{array}{c|cc} & M1 & M2 \\ \hline M1 & 0.9 & 0.1 \\ M2 & 0.2 & 0.8 \end{array}.$$

Ahora el fabricante de M2 planea introducir una nueva mezcla M3 o M4 para ampliar la cuota de Mercado. Un análisis de Mercado muestra que entonces las tendencias se comportarían como en las siguientes matrices S y T, respectivamente.

$$S = \begin{array}{c|ccc} & M1 & M2 & M3 \\ \hline M1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ M2 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ M3 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{array} \quad \text{bzw} \quad T = \begin{array}{c|ccc} & M1 & M2 & M4 \\ \hline M1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ M2 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ M4 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{array}$$

a) Describa el cambio a P en tres períodos de tiempo con ayuda de un diagrama de árbol reducido.

b) Examine el desarrollo de la cuota de Mercado del fabricante de M2 en los tres próximos períodos de tiempo, cuando M3 y M4 son introducidos.

Suponga que al principio el 40 % de los consumidores compraba la mezcla M2, y el 60 %, la mezcla M1.
Describa el método que ha elegido.

c) Dé dos recomendaciones al fabricante de M2 y explique su decisión. Elija dos maneras diferentes de solucionar el ejercicio y descríbalas.

4.8 Desarrollo de la población, material básica

Sea el desarrollo de una población el descrito por la siguiente matriz:

$$M = \begin{array}{c|cccc} & G1 & G2 & G3 & G4 \\ G1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ G2 & 0 & 0 & 0.625 & 0 \\ G3 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ G4 & a & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a) Prepare un diagrama para mostrar el desarrollo.

b) Sea la distribución original Calcule v_4 para a=8 y demuestre y explique su resultado

c) Explique y demuestre el desarrollo de la población para $a \neq 8$ y dé ejemplos correspondientes.
Examine si hay una distribución estacionaria

Proyecciones paralelas

Si se eligen las sugerencias de S. Stachniss-Carp yH. Weller (“Geometría del espacio“ en T ^{3} Europa: Álgebra Lineal, Geometría Analítica), no sólo hay una amplia oferta de posibilidades no sólo se abre un amplio campo para temas de especialización. Una unidad didáctica como esa puede conducir a los siguientes ejercicios.

4.9 Proyección, material básica

Para una proyección habitual en la práctica, la matriz de proyección es como sigue:

pr = $\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Sean los puntos A(2/-2/0), B(2/2/0) y E(2/-2/4) los vertices de un cubo ABCDEFGH.
Los puntos medios de todas las caras del cubo están relacionados entre ellos. Determine las coordenadas de los vertices de la figura en R^3. Describa la estructura de la matriz y los subsiguientes procedimientos que permiten dibujar esta figura en gráficos 2D con ayuda de la orden For/Endfor de la TI-92. Prepare un dibujo.

b) Determine una ecuación dependiente de las coordenadas reflejadas x‘ e y‘ para esos puntos en R^3 que son proyectados sobre el punto P‘(x‘/y‘) con esta proyección.
Explique y demuestre en detalle la importancia de esta ecuación para el dibujo en el plano de proyección.
Si es necesario, ilustre sus resultados en el esquema acompañante.

c) Explique la estructura básica de la matriz rotatoria con el ejemplo de la matriz que presenta la rotación alrededor del eje de las y.
Derive la matriz rotatoria que describe una rotación sobre la 2ª línea de bisección del plano x-y (y = - x) con el ángulo rotatorio α.

4.10 Proyección, material de especialidad

Para una proyección habitual en la práctica, los puntos U, V y W del espacio R^3 así como sus puntos reflejados U‘, V‘ y W‘ tienen las siguientes coordenadas en el plano de proyección R^2:
U(-2/-2/0) $\rightarrow$U‘(-1/0,5) , V(2/2/1) $\rightarrow$V‘(1/0,5) y W(4/2/4) $\rightarrow$W‘(0/3).

a) Describa un método para determinar la matriz de proyección a esta proyección, aplique ese método, y demuestre que lo siguiente es válido para esa matriz:

$$\text{pr} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Explique la relación entre la estructura de esta matriz por un lado y los vectores básicos del espacio R^3 y los del plano de proyección R^2 por otro.
Explique por qué desde el punto reflejado P‘ sólo no puede reconstruirse el punto original P.

Determine en dependencia de las coordenadas reflejadas x‘ e y‘ una ecuación para los puntos de R^3 que son proyectados sobre el punto reflejado P‘(x‘/y‘) con esta proyección.
Explique y demuestre en detalle la importancia de esta ecuación para el dibujo en el plano de proyección.

b) Sea una pirámide cuadrada con altura h = $2\sqrt{2}$ UL que tenga el eje z como eje de simetría y los puntos A(2/-2/0) y B(2/2/0) como vértices.
Determine los otros vértices de la pirámide, así como sus proyecciones, según la proyección dada, con la ayuda de la matriz pr.
Prepare un dibujo que muestre los ejes de coordenadas de R^3 y la pirámide.

c) Supongamos que la pirámide gira alrededor del eje d z con un ángulo de rotación de $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
Desarrolle una matriz general para esta rotación.
Determine las coordenadas de los vértices de la matriz rotada y sus puntos reflejados con respecto a la proyección. Añada la pirámide girada al dibujo

d) Supongamos que el area de la base cuadrada de la pirámide original de la parte b) es girada alrededor de la diagonal sobre la cual está situado el punto A. Sea el ángulo de rotación $\beta = \frac{\pi}{2}$.
Desarrolle una matriz reflejada general para esta rotación.
Determine las coordenadas de los vértices del cuadrado girado.
Comente su resultado.

Los dos ejercicios siguientes corresponden al Nuevo marco curricular de Matemáticas y al formato actualmente válido de ejercicio de examen final en Hamburgo. Han sido concebidos como ejercicios de soporte en clase y por ello cubren el nivel superior de los requisitos.

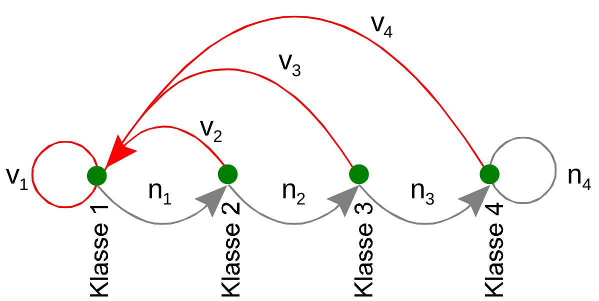
4.11 Ejercicio Vegetación, materia básica

En la region de transición entre el clima desértico y el clima templado, en la costa oeste de hay una vegetación de arbustos de hoja perenne sobre

una superficie de aproximadamente 2000 km². Se llama “Chaparral“.
La inflamabilidad de estas plantas depende en gran medida de su edad. Las plantas más viejas son muy fácilmente inflammables, debido a la gran cantidad de material escaparte de los peligros para el hombre y los animales, los incendios también cumplen una función muy útil: reemplazando a los arbustos quemados, crecen de nuevo plantas jóvenes y fuertes bastante rápidamente. Por tanto, los incendios espontáneos no siempre son apagados El rejuvenecimiento ayuda siempre a que las zonas con material seco no se hagan muy extensas.
Esta situación puede representarse, por ejemplo, mediante el siguiente modelo:

- La vegetación es clasificada, según su edad, en cuatro clases:
  Clase 1: 0 - 10 años Clase 2: 10 - 20 años
  Clase 3: 20 - 30 años Clase 4: 30 años
- Como medida para la cantidad de una clase no se toma el número de plantas, sino la superficie de la zona cubierta por cada clase.
- Para cada clase, el porcentaje de plantas que se queman en 10 años permanece invariable.
- La superficie total de la zona es siempre 2000 km².

El siguiente gráfico describe el desarrollo de la vegetación en este modelo:



<u>Leyenda:</u>

v_i = parte de la clase i que se quema,
(v_i < 1)

n_i = parte de la clase i que no se quema up *(n_i < 1)*

a) Dé una matriz de población (matriz Leslie) usando las cifras de la tabla y según el gráfico y el modelo descrito arriba y argumente su actuación b)

.

Partes que se queman	v_1 = 0,01	v_2 = 0,02	v_3 = 0,50	v_4 = 0,20
Partes que no se queman	n_1 = 0,99	n_2 = 0,98	n_3 = 0,50	n_4 = 0,80

b) Explique por qué $n_i + v_i = 1$ debe ser válido para las cuatro clases.

c) Al principio de la modelación, las clases ocupan las siguientes superficies, respectivamente:

Clase 1: 302 Clase 2: 284 Clase 3: 314 Clase 4: 1100

Calcule a partir de ésta tabla la previsión par alas medidas de superficie de cada clase después de 10, 20 y 50 años (lo que significa 1, 2 y 5 períodos de tiempo) con la ayuda de la matriz Leslie

d) Un cálculo en la parte c) puede también verse como una función. Describa la función (regla de clasificación, conjunto de definiciones y de objetivos) y dé el pronóstico para la situación dentro de 50 años, con su función como ejemplo.

e) Examine el desarrollo a largo plazo de la población. Describa su procedimiento y justifique su interpretación.

f) En la práctica, los administradores de Chaparral también efectúan una poda voluntaria y controlada de partes de la vegetación mayores de 30 años. Así se quema de promedio un 7% de esa clase.

Cambie su modelo de manera adecuada. Describa su procedimiento y arguméntelo. Analice qué impacto tiene la quema a largo plazo sobre las medidas de superficie de cada clase.

El ejercicio está basado en: Wiskunde A (1st período 1994, ejercicio 3)

El ejercicio está concebido para unas necesidades de tiempo de 80 min.. En caso de que se asigne menos tiempo, puede dejarse, por ejemplo, la parte f.

Esquema de solución

a) *Requisitos I y II (Explicaciones).*

$$L = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,5 & 0,2 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$$

b) Sólo existen los estados *arder* y *no arder*. Como se trata de partes, la suma es 1 en cada caso. (*Requisitos II)*

c) *Lo mismo que con a) predominantemente requisitos I.* Población después de 10 años: X_{10} =

$$\begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,5 & 0,2 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 386 \\ 299 \\ 278 \\ 1037 \end{pmatrix}$$

Cálculos para X_{20} o bien. $X_{20} = L\ X_{10}$ o $X_{20} = L^2\ X$ caso de que X signifique la población original. Mismo procedimiento para $X_{50.}$

d) *Principalmente requisitos III*

Si se toma, por ejemplo, un vector original constante X de la superficie, una posible función es: $f(t) = L^t\ X$ con $D_f = IN$ y conjunto de objetivos = $\{(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i \in IR^+\}$. Pronóstico (en 50 años) = f(5) = L^5 X *Hay también otras posibilidades de representación.*

e) *Principalmente requisitos II si se han tratado en clase.*

Ejemplo de interpretación:

Aproximadamente a partir del vigésimo período, los valores parecen estabilizarse a (371;368;360;901). La solución puede obtenerse haciendo el cálculo de la población como en c) , pero también es posible tomar la matriz. En el segundo caso la interpretación es, por ejemplo, “Las medidas de superficie para cada clase permanecen casi constantes a partir del período... “.

El método aplicado debería describirse y también explicarse en qué interpretación se basa, por ejemplo, para qué períodos se dan datos

f) *Requisitos II y III.*

Matriz modificada con la suposición de que la quema está integrada en un período

$$\begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,5 & 0,256 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,744 \end{pmatrix}$$

Los efectos a largo plazo son, por ejemplo, un claro (y relativamente rápido) decrecimiento de la cuota de superficie de la clase 4 y, al mismo tiempo, un incremento de las cuotas de las otras clases, aproximadamente relativo a sus tamaños previos. Así, en este modelo la quema tiene como resultado que el peligro de incendio decrecerá dentro de algunas décadas.

La modelización de la quema también es posible como matriz independiente, de manera que la quema se efectúa después o al principio de un período (véase el ejercicio para materia de especialidad).

4.12 Ejercicio de vegetación (materia de modalidad)

la primera página del ejercicio de la materia básica permanece igual.

a) Dé una matriz de población (matriz Leslie) usando las cifras de la tabla y según el gráfico y el modelo descritos arriba y justifique el procedimiento usado.

Partes quemadas	v_1 = 0,01	v_2 = 0,02	v_3 = 0,50	v_4 = 0,20
Partes no quemadas	n_1 = 0,99	n_2 = 0,98	n_3 = 0,50	n_4 = 0,80

b) Argumente por qué debe ser válido par alas cuatro clases: $n_i + v_i = 1$.

c) Al principio de la modelización, las diferentes clases tienen las siguientes superficies en km. ^{2}, respectivamente:

Clase 1:	Clase 2:	Clase 3:	Clase 4:
302	284	314	1100

Calcule a partir de esta tabla el pronóstico par alas medidas de superficie de cada clase después de 10, 20 y 50 años (lo que significa 1, 2 y 5 períodos de tiempo) con la ayuda de la matriz Leslie

d) Examine el desarrollo a largo plazo de la población. Describa su procedimiento y justifique su interpretación.

e) Hay funciones con elementos en su conjunto de definiciones que resultan ellos mismos cuando son reflejados, es decir,. $f(x_P) = x_P$. Con la ayuda de esta fórmula se pueden encontrar a veces tales puntos o mostrar que no existen. La coordenada x_P las características descritas se llama *punto fijo de f.*.

Describa el modelo Leslie de este ejercicio en una función adecuada y calcule el conjunto de todos los puntos fijos que se obtienen con la fórmula de arriba.

Decida si podría haber un punto fijo en la parte d).

Analice si todos los posibles elementos del conjunto de puntos fijos cumplen los requisitos del modelo para la vegetación de Chaparral.

f) En la práctica, los administradores de Chaparral también efectúan una poda voluntaria y controlada de partes de la vegetación mayores de 10 años.

Así, en el modelo la quema siempre tendrá lugar inmediatamente después de 10 años (por tanto al final de un período) y toda de una vez, tras lo cual el 2% de la clase 2, el 2% de la clase 3 y el 7% de la clase 4 arderán.

Determine una matriz adecuada N como modelo matemático para calcular los efectos sobre la vegetación. Describa también este modelo como función.

Describa el proceso complete de diez años de la quema espontánea y la voluntaria con ayuda de las matrices N y L y fundamente su procedimiento. Interprete su método en el lenguaje de las funciones.

El ejercicio está concebido para unas necesidades de tiempo de 100 min.. El tiempo y los requisitos también dependen de las materias que deban tratarse según el currículum.

Esquema de solución

a) hasta d) contienen los requisitos II y III..

e) contiene II y III.

La función posible f: X $\rightarrow$ L·X. f(X) = X significa L·X = X. esta fórmula lleva a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en cuyo conjunto de soluciones puede elegirse arbitrariamente una variable, así, por ejemplo F_set $\approx \{(0{,}4 \mid 0{,}4 \mid 0{,}4 \mid 1) \cdot x \mid x \in IR^+\}$.

La población calculada en d), en la cual el sistema se estabiliza, tiene aproximadamente la característica de punto fijo. *La solución se puede encontrar sin usar el cálculo de arriba, sino variando la fórmula o bien de forma argumentativa.*

La suma de los components de los vectores de población de la vegetación de Chaparral debe dar siempre 2000 según el enunciado del ejercicio Por lo tanto, sólo hay un punto fijo en el modelo: 2,2 x = 2000 $\Rightarrow$ x $\approx$ 909,1 and y el punto fijo, aproximadamente. (363,64 | 363,64 | 363,64 | 909,08).

f) *contiene los requisitos II and III..*

Los porcentajes de la quema pueden encontrarse en la línea 1, aquí m_{11} = 1 , porque no se queman plantas de clase 1.

La otras líneas muestran las partes correspondientes que no han ardido en la diagonal, la clase correspondiente se reduce en proporción:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0,02 & 0,02 & 0,07 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,93 \end{pmatrix}$$

N·L describe el proceso completo:

$X_{i+1} = L \cdot X_i$ da las medidas de superficie quemada por incendios espontáneos, $X_{new} = N \cdot X_{i+1}$ describe el proceso de quema voluntaria, que sigue el supuesto

$X_{new} = N \cdot X_{i+1} = N \cdot (L \cdot X_i) = (N \cdot L) \cdot X_i$.

Sea la function que describe el proceso de quema voluntaria g: $X \to N \cdot X$.

El cálculo es descrito, pues, por una concatenación de las funciones f y g:

$X_{new} = g(f(X_i) = (g \circ f)(X_i)$

4.13 Subtareas

Ejercicio 1 (material de especialidad):

Dado el sistema de ecuaciones

1. $2x + y=5$
2. $3y+4z=12$

a) Resuelva el sistema de ecuaciones!
b) Interprete el sistema de ecuaciones y la solución geométricamente y prepare un dibujo preciso.

Esquema de solución:

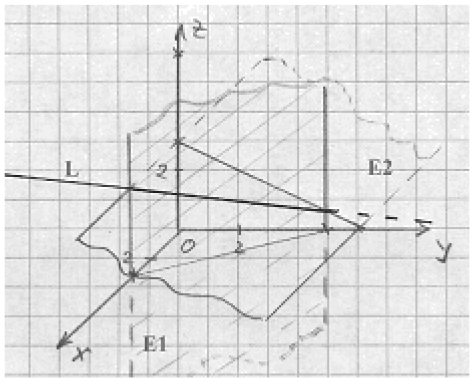
a) $x = 1/2 +2/3\ k$ $y = 4/3 – 4/3\ k$ $z = k$; $k \in IR$

$L = \{ (1/2 +2/3\ k \mid 4/3 – 4/3\ k \mid k)\ ;\ k \in IR \}$

b) - Mediante las ecuaciones, se representan planos en el espacio.

- El primer plano discurre paralelo al eje z.
- El segundo plano discurre paralelo al eje x.
- Los dos planos se intersectan en una recta. Los puntos de la recta corresponden al conjunto de soluciones del sistema lineal de ecuaciones.

- El grafico se muestra en la imagen 1.



Picture 1

alternativamente

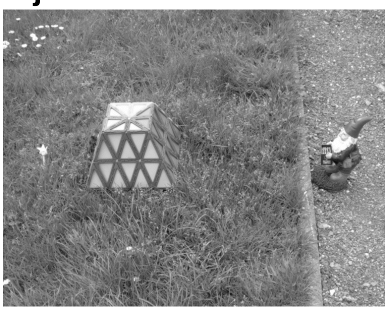
Ejercicio 2: fórmulado de manera más abierta

Dado un plano con la ecuación:

$x/3 + y/4 + z/2 = 1$

a) Dibuje el plano en el sistema de coordenadas.
b) Describa todas las maneras posibles en que una recta g puede estar situada en relación a este plano y dé un ejemplo en cada caso.

Ejercicio 3: material de especialidad



En la imagen se muestra un jardín en que hay un trabajo de artesanía consistente en un tronco de pirámide recta y cuadrada. L superficie de la base tiene una longitu de de arista de 1,20 m., la superior de 0,70 m. La altura del tronco de pirámide alcanza los 1.50 m.

A una distancia de 3 m, discurre un camino paralelo a la arista, limitado por una pequeña pared.

Justo en medio detrás de la pieza, se alza una florecita a una distancia de 1 m.

Imagine que está caminando por el caminito junto a la pared y pasa por delante de la pieza de artesanía ¿En qué zona del camino es invisible la flor?

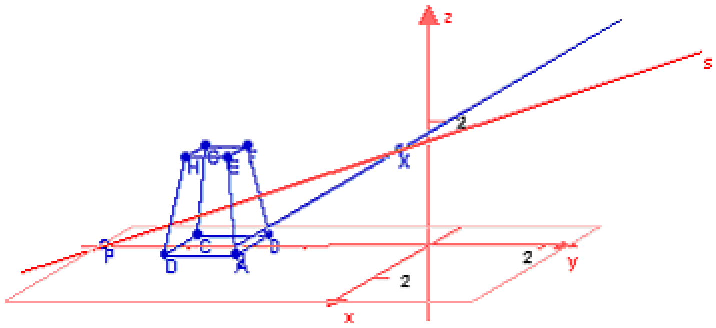
a) Para contestar a la pregunta, presente la situación de manera adecuada en un sistema de coordenadas e indique las idealizaciones y simplificaciones que ha hecho.
b) Describa su enfoque y fundamente su solución, efectúe los cálculos y responda a la pregunta formulada al principio.

Esquema de solución:

Observación: Las siguientes versiónes de solución del equipo que formuló la pregunta demuestran que el ejercicio puede solucionarse de maneras absolutamente diferentes. Sobre todo, la discusión diferentemente pormenorizada de la presunción de modelos muestra que puede ser bastante difícil fijar criterios de evaluación adecuados.

Versión 1

a) El sistema de coordenadas es elegido de maneera que el camino represente el eje de las x, y que la flor (en el modelo representada como punto en el eje $x-y$) se encuentra en el eje y negativo. Los vertices del tronco de pirámide resultan, pues, de las indicaciones del texto: $A(0{,}6\,|-3\,|\,0)$, $B(-0{,}6\,|-3\,|\,0)$, $C(-0{,}6\,|-4{,}2\,|\,0)$, $D(0{,}6\,|-4{,}2\,|\,0)$, $E(0{,}35\,|-3{,}25\,|\,1{,}5)$, $F(-0{,}35\,|-3{,}25\,|\,1{,}5)$, $G(-0{,}35\,|-3{,}95\,|\,1{,}5)$ y $H(0{,}35\,|-3{,}95\,|\,1{,}5)$. La flor es idealizada y mostrada como punto $P(0\,|-5{,}2\,|\,0)$. La persona que pasa junto a la pared se supone tuerta y con una altura ocular de 1.7m., de manera que el ojo queda en línea recta $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1{,}7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.



La zona del camino donde no se ve la flor queda en el eje x y es simétrica a la coordenada origen. Cuando las rectas XP ($X \in g$) y DH se intersectan, se alcanza una zona fronteriza donde la flor ya no puede verse / aún puede verse.

Fórmula: $$\begin{pmatrix} 0 \\ -5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \lambda \\ 5{,}2 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -4{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}25 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

La segunda y tercera ecuación nos da $\mu = \frac{12}{59}$ y $\nu = -\frac{68}{295}$. Si se ponen en la primera ecuación, se obtiene el valor $\lambda = \frac{8}{3} = 2{,}\overline{6}$.

Por tanto, la flor no se puede ver en un área $\pm 2{,}7m$ respecto del origen del sistema de coordenadas por una persona con una altura ocular de 1.7m.

Comentario 1: Puede obtenerse una estimación aproximada del área con ayuda del teorema de Tales bajo el supuesto de que se mira la flor desde el suelo: La línea recta PD intersecta el eje x en 3,12.

Comentario 2: Una CAS permite una modificación del ejercicio, por ejemplo al efecto de que la altura ocular se dé como parámetro. Podría discutirse entonces el cambio del intervalo de visibilidad con la altura ocular.

Versión 2

a) Modelización:

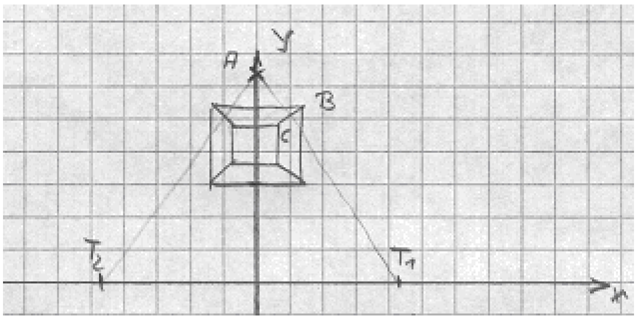
- El jardín y el camino construyen un plano ideal E.
- La flor se considera un punto en el plano E.
- El tronco de pirámide cuadrada está formado por aristas y superficies ideales.

- Los ojos del observador se mueven solo a una supuesta altura de 1.70m.

- Los dos ojos del observador se unen en un punto.

- Los ojos se mueven directamente sobre la supuesta línea de la valla.

Representación en el sistema de coordenadas:
(Esquema)



b) Flor: A(0 | 5,2 | 0)

Tronco de pirámide: B(0,6 | 4,2 | 0)

C(0,35 | 3,95 | 1,5)

Observador: en el eje x a 1.7 m altura

Plano E1 con los puntos A, B y C $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0,6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0,35 \\ -1,25 \\ 1,5 \end{pmatrix}$, $t, s \in \Re$

Observador en línea recta g $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \in \Re$

Determine el punto de intersección T(8/3 | 0 | 1,7)

Todos los otros cálculos se basan en la simetría de la alineación.

En un área de aproximadamente. 2.7m a la derecha y a la izquierda de la pieza de artesanía, no puede ver la flor un observador con altura ocular de 1.7m.

Versión 3

Supuestos: la flor es representada por el punto S, que se encuentra en el plano de la base del tronco de pirámide; la imagen de la valla en la vista desde arriba es una recta x; el observador sólo ve con un ojo, que mueve a una altura de 1.70m en línea recta g paralela a x.

Esbozo: Vista desde arriba (proyección horizontal); el eje x se encuentra sobre la valla x; el eje y discurre verticalmente al eje x, y atraviesa S; el tronco de pirámide tiene la superficie de la base ABCD (en la cual AB será paralelo a x) y la superficie superior EFGH, con lo cual ABFE es la superficie lateral del lado del observador (los ejes *x, y* y *z* conforman un triedro, como habitualmente).

El área donde S no puede verse está completamente marcada por los puntos U y V que, se encuentran sobre g, con lo cual U es el punto de intersección de la recta con el plano SCG y V es el punto de intersección de g con el plano SDH. (Se ve rápidamente que el plano marcado por g y HG no tiene que ser tenido en cuenta.) Para h = 1.70m dse obtiene: S(0; 5,20; 0), C(0,60; 4,20; 0), G(0,35; 3,95; 1,50), SCG: $15x + 9y + 4z = 46{,}8$

La recta g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}70 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, El punto de intersección de g y

SCG: $\lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow \overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \\ 1{,}70 \end{pmatrix}$

Por tanto, el área en cuestión comprende aproximadamente. 2,67m. a la izquierda y a la derecha del origen del sistema de coordenadas elegido, en la valla.

Con valores aproximados (obtenidos mediante pruebas significativas) pueden lograrse hasta el 75% de los puntos.

Ejercicio 4 (materia básica / materia de especialidad):

Dado el punto P1 (0|1|2).

a) Determine todos los puntos cuyas coordenadas resultan de intercambiar las coordenadas de P1 y dibuje esos puntos en un sistema de coordenadas.

b) Muestre que todos esos puntos se encuentran en un plano.

c) El punto P1 y los otros puntos que ha encontrado son los vértices de un polígono. Dé dos características de ese polígono y demuéstrelas.

d) Analice si los puntos que han resultado del intercambio están en un plano cuando las coordenadas se dan arbitrariamente.

__Esquema de solución:__

Por permutación de las coordenadas se obtienen otros cinco puntos de $P_1(a;b;c)$: $P_2(a;c;b)$, $P_3(b;a;c)$, $P_4(b;c;a)$, $P_5(c;a;b)$, $P_6(c;b;a)$, si las tres coordenadas son diferentes por parejas. Como la suma $a+b+c=s$ de las coordenadas permanence invariable si se intercambian las coordenadas, los 6 puntos se encuentran en un plano con la ecuación $x_1+x_2+x_3=s$. Los puntos $P_1,...,P_6$ tienen la misma distancia al punto $M\left(\frac{s}{3};\frac{s}{3};\frac{s}{3}\right)$ porque

$\overline{P_iM}=\sqrt{\left(\frac{s}{3}-a\right)^2+\left(\frac{s}{3}-b\right)^2+\left(\frac{s}{3}-c\right)^2}$; por tanto, se encuentran en un círculo alrededor de *M* con el radio $r=\overline{P_1M}$, que sólo es igual a cero si todas las coordenadas son iguales. Si P_1 tiene las coordenadas $a=0,b=1,c=2$ se obtiene para $\angle P_1MP_2=\alpha$ que $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{MP_1}\cdot\overrightarrow{MP_2}}{\left|\overrightarrow{MP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MP_2}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}$. Así pues, este ángulo es 60°. Se demuestra analógicamen te que los ángulos $\angle P_2MP_4$, $\angle P_4MP_6$, $\angle P_6MP_5$, $\angle P_5MP_3$ y $\angle P_3MP_1$ tienen el mismo tamaño. Por lo tanto, el hexágono $P_1P_2P_4P_6P_5P_3$ es regular.

Puede esperarse que los alumnus elijan ina vía menos general, que conduzca a la solución mediante "desvíos". Esto no es infrecuente en una situación de examen y no debe conducir a bajarles puntos.

3.3Grupo de trabajo Estocástica

Problemas generales:

- En la material de Estocástica hay mucha demanda de formación adicional, independientemente del uso de tecnologías.
- Las clases se organizan de manera muy diferente en los diferentes estados alemanes (por ejemplo, Berlín y Brandemburgo empiezan en la clase 1, Turingia en la 10).
- La Estocástica se caracteriza por un porcentaje alto de modelización, los aspectos algorítmicos formales tienen un papel secundario.
- El trabajo con conceptos y la importancia de la comprensión lectora de textos significativos demandan mucho conocimiento específico por parte de los alumnos.
- La Estocástica es especialmente adecuada par el manejo de problemas reales (clases orientadas a proyectos); sin embargo, este aspecto sólo puede ser puesto en práctica parcialmente en una situación de examen.

Papel de las CAS / CG:
CAS er básicamente un instrumento para la manipulación y transformación de términos, que juega sólo un papel secundario en la Estocástica
La CG sin CAS ya es capaz de visualizar relaciones de gráficos y preparar, por ejemplo, los valores de funciones en tablas. Este aspecto es crucial con la modelización de procesos estocásticos.
Los requerimientos esenciales en técnicas de cálculo ya los cumplen las CG; no hay una gran diferencia entre los ejercicios para las CG y los de las CAS.

Comparadas con el uso de las calculadoras científicas, existen las siguientes posibilidades para el uso de las CG / CAS:

- Modelización de procesos reales, también sin recurrir a los valores tabulados.
- Manejo de grandes números n y pequeñas probabilidades p
- Manejo de distribuciones contínuas arbitrarias
- Visualización de procesos estocásticos

- Problemas con matrices estocásticas
- Posibilidades de simulaciones

Las ventajas de CAS / CG solo son aplicables de manera limitada en una situación de examen.
Los ejercicios que requieren un uso intensivo de CAS sólo son construibles y razonables hasta cierto punto. Las diferencias estriban especialmente en las cifras usadas y en la complejidad de las ecuaciones a resolver.

Examen de Estocástica, materia básica

1. Según las indicaciones del fabricante, la probabilidad de avería en el motor de un tipo determinado de motores de avión, en un avión con mantenimiento regular y uso medio es de $q=10^{-5}$ por año.
   Una aerolínea posee 130 aviones con con dos de los motores descritos cada uno y 60 aviones con cuatro de estos motores cada uno. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:
   A. No se avería ningún motor.
   B. Se averían menos de tres motores.
2. Las averías en los motores de un avión son independientes una de otra. Una avión aún puede aterrizar con seguridad si al menos la mitad de los motores funcionan.
   La “seguridad“ de un avión con dos motores puede describirse dependiendo de la probabilidad de una avería q mediante la fórmula $S_2(q) = 1 – q^2$, la seguridad de un avión con cuatro motores mediante la fórmula $S_4(q) = 1- 4q^3 + 3q^4$. Razone las dos fórmulas.
3. Analice cuál de los dos tipos de avió es más “seguro“. Grafique la “seguridad” en dependencia de q en el área $0 \le q \le 1$ en un esquema adecuado.
4. El jefe de la empresa afirma: *„Ya que nuestro avión de dos motores es más seguro, en un área más grande q que el avión de cuatro motores, sólo compraremos aviones de dos motores en el futuro“.* Dé su opinión sobre esta afirmación.

Comentarios sobre el ejercicio propuesto:

La manera en que se ha planteado el ejercicio clarificará hasta qué punto las modernas tecnologías de cálculo, como por ejemplo CAS/CG, pueden contribuir a una solución de ejercicios de examen en el campo de la Estocástica. El ejercicio fue concebido en principio sin indicar condiciones concretas (tiempo de trabajo disponible, número de puntos dados) porque las normativas correspondientes en los diferentes estados difieren mucho, especialmente en el campo de la Estocástica.

La tarea de la **parte1** es más bien *standard* en Estocástica. No encontramos una tarea típica que requiriera CG o CAS. Sin embargo, que también con el uso de herramientas modernas, son necesarios en los exámenes ciertos *standards* básicos, así como inicios psicológicamente “tranquilizadores”.

En la **parte 2** las proposiciones matemáticas sobre la “seguridad“ de los aviones deben demostrarse y/o deducirse. Aquí “seguridad” significa la probabilidad con la cual los aviones pueden aterrizar aún más seguros. Se precisan conocimientos estocásticos elementales, sobre la distribución binomial y sobre el “suceso contrario”. La tarea fue formulada de manera que el alumno no debe encontrar las relaciones por sí mismo ya que estas fórmulas deben usarse otra vez en las siguientes subtareas.

En la **parte 3** la “seguridad” debe ser graficada en dependencia de la probabilidad de una avería en un motor. Debe interpretarse la representación gráfica. Aquí la CG es de gran ayuda, pues la representación puede examinarse con la ayuda de las diferentes áreas de ZOOM. El alumno ha de discernir que el avión de 4 motores, si $q<1/3$, es más seguro que el de 2 motores; si $q>1/3$, sucede lo contrario. Sin embargo, también forman parte de la interpretación las afirmaciones de que el caso $q>1/3$ es irrelevante en la práctica, y de que la seguridad en la zona que en la práctica resulta relevante no difiere en realidad entre los dos tipos de avión.
En la **parte 4** el alumno debe comentar la afirmación del jefe, consultando sus conclusiones de la representación gráfica. Esta afirmación es un ejemplo de interpretación errónea de la representación gráfica y deberá ser desmentida con argumentos objetivos.

La tarea no requiere casi ningún esfuerzo de cálculo, sino más bien capacidad de juzgar e interpretar resultados, e imaginación. El uso de las CG tiene sentido, las CAS no son necesarias para resolver la tarea.

4 Apéndice

El uso normalizado de operadores en las materias matemático-científicas permite al alumno comprender qué actividades intelectuales y qué representación de sus soluciones se necesitan. Turingia (véase 4.1) y Sajonia (4.2) han elaborado una descripción de operadores por separado. Aquí solo se presentan los ejemplos del campo de las Matemáticas de la presentación sajona de 2002.

4.1 Operadores para las actividades del alumno en Matemáticas (borrador de 6 de julio de 2000)

Las siguientes tablas muestran operadores importantes utilizados en ejercicios de materias matemático-científicas, así como sus características.

Para la presentación de soluciones por parte de los alumnos es válido el siguiente **principio básico**: **La solución y su desarrollo deben ser presentados de manera comprensible lógicamente, así como en forma oral exenta de errores.**

4.1.1 Operadores con expectativa de respuesta definida

Operadores(selección)	Caracterización
1. Cite... Dé…	Formulación de un hecho o enumeración de hechos sin argumentación y/o sin enfoque de solución
2. Esquematice Grafique Construya	Representación gráfica de las características esenciales de un objeto , esbozo manual también posible Representación gráfica exacta
3. Compare	Comparación entre al menos dos hechos, si es necesario estipulación de criterios de comparación, determinación de características comunes y diferencias
4. Describa... Explique	Presentación sistemática de un hecho . . . Substanciación de verificaciones (hechos) evidenciando las normas, reglas y relaciones que las sustentan
5. Resuelva Determine Calcule Obtenga	Debe presentarse un enfoque comprensible de la solución. Si es necesario, las herramientas de ayuda preestablecidas y/o los procedimientos pueden ser utilizados. Ningún comentario sobre las herramientas de ayuda significa: ¡se aceptan todas las herramientas de ayuda permitidas!
6. Argumente	Presentación verbal de las relaciones entre hechos desde el punto de vista de la causalidad (causa-efecto, dado–buscado, verdad– falsedad)
7. Muestre que Demuestre que Refute que	Argumentación consistente en un sentido matemático severo a través de conclusiones lógicas de hechos conocidos hasta llegar a la proposición que se quería demostrar Demostración de una contradicción mediante un cálculo o conclusiones lógicas o mediante la prueba de un contraejemplo

4.1.2 Operadores con expectativa abierta de respuesta

Operadores (selección)	Caracterización
1. Analice Juzgue Valore Decida Interprete Discuta Prepare	Operadores para tareas “formuladas más abiertamente“, hasta el ensayo matemático

4.2 Uso de operadores en clases matemático-científicas con disponibilidad de calculadoras gráficas (CG) en *Gymnasien* de educación general, *Gymnasien* nocturnos y *Kollegs* (escuelas de adultos donde se prepara el examen final de bachillerato) en Sajonia (enero 2002)

4.2.1 Comentarios preliminares

Con la introducción de la calculadora gráfica (CG) en las materias escolares **Matemáticas, Física, Química y Biología** como herramientas permitidas durante las clases, especialmente en los exámenes, en trabajos de clase, exámenes y exámenes finales de bachillerato, se suscita la demanda de utilizar operadores normalizados (palabras clave) cuando se formulan los ejercicios. Con la ayuda de estas palabras clave, se da al alumno la posibilidad de reconocer qué actividades intelectuales y qué presentación de su solución se requieren.
La utilización normalizada de operadores en Matemáticas y las materias científicas permite una mayor transparencia en la valoración de la solución encontrada con la CG.

La CG aumenta las posibilidades de profesores y alumnos por lo que concierne a la estructura de las clases. Con una cultura de tareas que deja abiertas al alumno varias estrategias y/o herramientas para la solución de problemas, cobra gran importancia por lo que afecta a la presentación de la solución y a la especificación del rendimiento, la definición inequívoca de la expectativa de respuesta. Los operadores usados en la formulación de los ejercicios deben ser introducidos durante las clases, y su uso debe ser practicado en diferentes ejemplos.

En las clases matemático-científicas lo deseable es una relación bien equilibrada entre trabajo sin herramientas y un uso razonable de las herramientas modernas. El uso de la CG resulta especialmente apropiado si

- soporta el Análisis de Problemas por visualización, por ejemplo, Representación de cantidades substanciales de datos, secuencia cronológica de procesos, dependencias y/o correlaciones

- se usa como herramienta heurística, por ejemplo, efectuar pruebas sistemáticas, examinar hechos en profundidad, controlar,

- ayuda a solucionar tareas rutinarias complejas y, por tanto, capacita al alumno para concentrarse en el tema principal a tratar , por ejemplo, reduciendo la carga de trabajo en cálculos numéricos, regresiones, aproximaciones, recursiones, o representaciones gráficas, aumento de la eficiencia cuando se calcula con datos registrados en tablas,

- aumenta el número de enfoques de solución aplicables a un problema, por ejemplo, uso de diferentes niveles de herramientas, descomposición del problema en partes para las que existen programas adecuados de CG,

- es usada para simulaciones, por ejemplo el análisis de procesos estocásticos y aleatorización, para el análisis de los efectos de una variación de coeficientes en ecuaciones de funciones, o de variables en fórmulas,

- posibilita diferentes tipos de representación para un hecho o para un conjunto de datos, por ejemplo, la combinación de representaciones tabulares, analíticas y gráficas en relaciones de funciones, y representaciones tabulares y gráficas de datos y sus parámetros.

En general, los alumnos no deberían ser invitados a utilizar la calculadora gráfica (CG). Deberán reconocer las posibilidades de usarlas, y decidir con qué herramientas desean resolver los ejercicios planteados. Esto incluye la decisión sobre un nivel gráfico o de la CG así como la elección de los programas adecuados.
En las materias **Biología, Química y Física** apenas existirá algún ejercicio que pueda ser resuelto sólo usando la CG (y no deberían buscarse explícitamente tales ejemplos). De hecho el alumno debería ser capaz de reconocer maneras eficientes de resolver ciertos tipos de ejercicios usando la CG. Las rápidas diferenciaciones de casos y los métodos de exploración se vuelven más importantes.

Si se usan programas para solucionar problemas, el método de solución debe ser comprensible. Así pues, generalmente no es suficiente indicar el nombre del programa, a no ser que fuera elaborado en clase o se halle muy extendido. ,.Debe quedar claro qué resultados se obtuvieron y a partir de qué datos de entrada con la ayuda del programa. Si se obtienen soluciones falsas o incompletas, el usuario será el único responsable.

El uso de operadores presentados en el siguiente material y los siguientes ejercicios de ejemplo debe servir para dar soporte a los profesores en la formulación de sus ejercicios, sobre todo en los trabajos de clase y exámenes

4.2.2 Operadores esenciales en el uso de calculadoras con capacidades gráficas

La tabla muestra una selección de los operadores más importantes, que se usan en los ejercicios de materias científico-técnicas así como las actividades d los alumnos con el uso de CG.

Para la presentación de soluciones por parte de los alumnos es válido el siguiente **principio básico**: **La solución y su desarrollo deben ser presentados de manera comprensible lógicamente, así como en forma oral exenta de errores.**

Operadores en el enunciado del ejercicio	**Actividades de los alumnos**
Dé**,** Cite**...**	Formulación del resultado numérica o verbalmente sin representación del enfoque de la solución y sin argumentación
Esquematice **...**	Cita de los hechos cruciales
Describa **...**	Presentación de un hecho o proceso en forma textual con uso del correspondiente lenguaje técnico En general deberían usarse frases gramaticalmente completas…
Obtenga **... ,** Determine**...**	Presentación de un enfoque de solución y formular el resultado; quedando abierta la elección de medios (por ejemplo , gráficos o numéricos) El uso del nivel de herramientas de la CG queda restringido por frases como: “Establezca gráficamente“ o determine mediante cálculo“. El uso de programas GCG está permitido en principio, sin embargo, debe referirse el uso de un programa (si es necesario, también los datos de entrada y salida). El establecimiento gráfico de soluciones puede llevarse a término preparando un dibujo sobre papel o presentando los pasos del enfoque de la solución a partir de la solución gráfica de la CG. No es necesario copiar el *display*
Calcule **...,**	El resultado se obtiene mediante operaciones aritméticas a partir de una fórmula Se permite el uso de CG, incluso de programas para CG. Sólo queda excluido el nivel de herramientas gráficas.

Deduzca… y calcule ..., **Calcule** ..., Cite los correspondientes pasos intermedios para encontrar una solución general o los resultados intermedios.	Si se requiere indicar los pasos intermedios, esto debe ser formulado en el enunciado del ejercicio, por ejemplo con “Deduzca…“, “Presente los pasos intermedios de su cálculo“, “Dé pasos intermedios para la obtención de una solución general o de resultados intermedios“.
Dibuje**... ,** Represente gráficamente **...**	Presentación del objeto a escala, use elementos constructivos, si es necesario calcule pares de valores
Analice**...**	Descubrimiento de una característica, una relación entre objetos
Muestre **... ,** Demuestre **...,**	Confirmación de un teorema según reglas de decisión válidas (con la ayuda de la deducción o de la argumentación lógica)

4.2.3 Ejemplos de ejercicios de Matemáticas

Los siguientes ejemplos clarificarán diferencias en la presentación del enfoque de solución y las soluciones de acuerdo a diferentes requisitos en el enunciado del ejercicio. Si es necesario, se presentarán varias posibilidades de expectativa de solución. Las expectativas de solución a los ejercicios de determinación, se dan, por lo general, valores redondeados, incluso cuando puede ser establecido un valor exacto (por ejemplo, un número irracional). Esto debería aclarar la posibilidad de uso de las CG en tales ejercicios. Si fueran requeridos de los alumnos análisis de existencia y/o declaraciones de unicidad, ello debería quedar claro en el enunciado del ejercicio (por ejemplo, Muestre que las coordenadas del punto de intersección de dos rectas dadas son irracionales.) En tareas donde deben indicarse coordenadas de punto redondeadas, no es necesario indicar el signo del redondeo (ejemplo, punto $P(2{,}3\,;\,0{,}4)$).

4.2.4.1 Se da la función f mediante $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$.

El gráfico de la función f y los ejes de coordenadas limitan totalmente una superficie.

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posibles expectativas de respuesta
Dé el área de la superficie.	$A \approx 3{,}2$
Obtenga el área de la superficie.	$A \approx \left\lvert \int_{0}^{1{,}13} \left(x^3 + 2x^2 - 4\right) dx \right\rvert \approx 3{,}2$
	En la representación gráfica del gráfico en la CG, el valor de la integral definida fue establecido tras la determinación de los límites de integración inferior y superior. El área de la superficie es aproximadamente 3,2.

4.2.4.2 Se dan las funciones f *mediante* $y = f(x) = x^2 + 3x$ y g, mediante $y = g(x) = x + 1$.

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posible expectativa de respuesta
Dé las coordenadas de los dos puntos de intersección de los gráficos de las funciones *f* y *g*.	$S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$
Obtenga las coordenadas de los dos puntos de intersección de los gráficos de las funciones *f* y *g*.	Representación de los gráficos de las dos funciones con la CG Lectura de las coordenadas de los puntos de intersección: $S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$.
	f(x) = g(x) $x^2 + 3x = x + 1$ $x^2 + 2x - 1 = 0$ Solución de la ecuación cuadrática con la CG: $x_1 \approx 0{,}41$; $x_2 \approx -2{,}41$ La introducción de g en la ecuación da: $S_1(-2{,}4; -1{,}4)$; $S_2(0{,}4; 1{,}4)$

4.2.4.3 Se dan las rectas g mediante $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ y h mediante $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posible expectativa de respuesta
Dé las coordenadas del punto de intersección.	$S(-3;-4)$
Obtenga las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas	(I) $-1+2s=1+2t$ (II) $-2+2s=-2+t$ (I) $2s-2t=2$ (II) $2s-t=0$ Resolución del sistema de ecuaciones con CG: $s=-1;\ t=-2$. Introducicción de t en la ecuación de la recta g: $S(-3;-4)$
	Dibujo en la CG de ambas rectas en el modo de representación de curvas paramétricas y leeer las coordenadas del punto de intersección da: $S(-3;-4)$.
	Transformación de las ecuaciones de recta a la forma general con el programa “Rectas“ da: $g:\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\quad y\quad h:\ y=x-1$ Representación de ambas rectas con la CG y leer el punto de intersección da: $S(-3;-4)$.

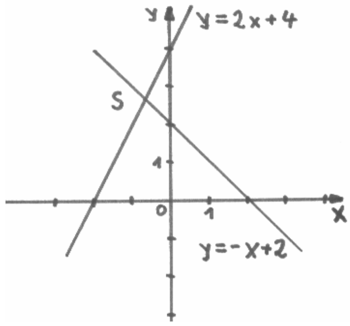
Calcule las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas. **Obtenga las coordenadas del punto de intersección mediante cálculo.**	$(I)\quad -1+2s=1+2t$ $(II)\quad -2+2s=-2+t$ $(I)\quad 2s-2t=2$ $(II)\quad 2s-\quad t=0$ Solución del sistema de ecuaciones con la CG : $s=-1;\ t=-2$ Introducción de t en la ecuación de la recta g: $S(-3;-4)$.
	Uso de un programa CG: Entrada: coordenadas de los vectores de apoyo y de dirección Resultado: $S(-3;-4)$

4.2.4.4 Se da la función f mediante $y=f(x)=\dfrac{2x^2}{3x^2+x^4}$.

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posible expectativa de respuesta
Analice el gráfico de la function por lo que respecta a la simetría.	$f(-x)=\dfrac{2(-x)^2}{3(-x)^2+(-x)^4}=\dfrac{2x^2}{3x^2+x^4}=f(x)$ $De\ f(-x)=f(x)\ resulta:$ El gráfico de la función f es axialmente simétrico al eje y

4.2.4.5 Se da el sistema de ecuaciones

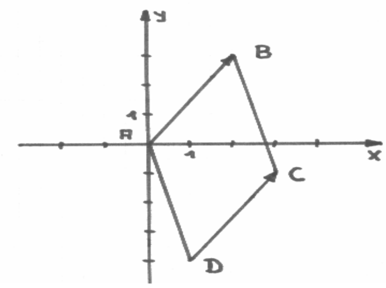
$$\begin{array}{l}(I)\;\; 2x - y = -4 \\ \underline{(II) - x - y = -2}\end{array}.$$

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posible expectativa de respuesta
Obtenga gráficamente **la solución del sistema de ecuaciones.**	 **Resultado:** $x \approx -0{,}7;\; y \approx 2{,}7$
	Representación de los gráficos de las funciones $y1 = 2x + 4$ e $y2 = -x + 2$ con la CG Resultado: $x \approx -0{,}67;\; y \approx 2{,}67$

4.2.4.6 Se dan tres puntos en el espacio mediante sus coordenadas.

Operadores en el enunciado del ejercicio	Posible expectativa de respuesta
Describa un método para poder calcular el área de un triángulo sin la utilización de un programa de I CG.	1.) Se calculan las longitudes de los lados del triángulo en cada caso con la ayuda de la relación $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. 2.) Mediante el uso del teorema del coseno, se calcula, por ejemplo, $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. 3.) Con ayuda de la fórmula del área $A = \dfrac{ab}{2}\cos\gamma$ se calcula finalmente el área de la superficie requerida.

4.2.4.7 Se dan los puntos A(0;0), B(2;3) y D(1;-4).

Operadores en el enunciado del ejercicio	**Posible expectativa de respuesta**
Obtenga las coordenadas de un punto C de manera que el cuadrado ABCD sea un paralelogramo.	La suma del vector $\vec{AB}$ al vector de posición $\vec{OD}$ da el vector de posición $\vec{OC}$. La lectura de las coordenadas de este vector proporciona las coordenadas del punto: C(3;-1)
	$\vec{OC}=\vec{OD}+\vec{AB}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $C(3;-1)$
	 C(3;-1)

4.3 Participantes

Apellido, Nombre	Land	Dirección E-Mail
Bänsch, Christian	Berlin	christian.baensch@senbjs.verwalt-berlin.de
Bebensee, Tim	CASIO	bebensee@casio.de
Bellstedt, Martin	Thüringen	m.bellstedt@t-online.de
Brenner, Hans-Joachim	Thüringen	hans-joachim.brenner@t-online.de
Decleir, Gerhard	TI	g-decleir@ti.com
Euba, Winfried	Hamburg	weuba@t-online.de
Fothe, Prof. Dr. Michael	Univ. Jena	fothe@minet.uni-jena.de
Fritzlar, Dr. Torsten	Thüringen	fritzlar@web.de
Hartung, Ralph	Hessen	r.hartung@hkm.hessen.de
Heinrich, Dr. Rainer	Sachsen	rainer.heinrich@smk.sachsen.de
Hummel, Bernhard	B.-Württemberg	bernhard-hummel@web.de
Klaner, Kurt	CASIO	klaner@casio.de
Klemisch, Ingo	Nordrheinwest-falen	Ingo.klemisch@brdt.nrw.de, ingoklemisch@aol.com
Knechtel, Heiko	Niedersachsen	hknechtel@aol.com
Kohl, Lutz	Univ. Jena	lutz.kohl@uni-jena.de
Langlotz, Dr. Hubert	Thüringen	langlotz-mosbach@t-online.de
Moldenhauer, Dr. Wolfgang	Thüringen	WMoldenhauer@thillm.thueringen.de
Neef, Eberhard	Bremen	Eberhard.Neef@bildung.bremen.de
Peters, Uwe	Saarland	upeters@lpm.uni-sb.de
Reddmann, Jörg	CASIO	reddmann@casio.de
Reineke, Vera	Niedersachsen	vera.reineke@mk.niedersachsen.de
Reiff, Kurt-Anton	Berlin	toni.reiff@t-online.de
Scheungrab, Christian	Bayern	christian.scheungrab@isb.bayern.de
Springstein, Helmut	Hamburg	Helmut.Springstein@hamburg.de
Wagner, Jürgen	Sachsen	juergen.wagner@ci.smk.sachsen.de
Stachniss-Carp, Dr. Sibylle	Hessen	S.Stachnisscarp@web.de
Weiskirch, Wilhelm	Niedersachsen	w.weiskirch@teleos-web.de
Weitendorf, Jens	Schleswig-Holstein	jens.weitendorf@hansenet.de
Wiederstein, Georg	Rheinland-Pfalz	GWiederstein@t-online.de