LAS MATEMÁTICAS QUE ME PIERDO SI NO USO LA CALCULADORA

Mauricio Contreras del Rincón
IES Benicalap (Valencia)
Departamento Didáctica de la Matemática
Universitat de Valencia

¿Cómo es posible que Sonia, la profesora de 1º de ESO prohíba a sus alumnos el uso de la calculadora? En cierta ocasión me dijo que, si en alguno de los problemas que pone en el examen sus alumnos necesitan, por ejemplo, hallar una raíz cuadrada, entonces ella pone el resultado de la raíz cuadrada en el enunciado, como un dato más del problema, para evitar que usen la calculadora. Por decirlo de alguna manera, la raíz cuadrada era la única operación que no era necesario que hicieran "a mano", ya que su resultado se incluía como dato. Sin embargo, cualquier otra operación deberían hacerla con algoritmos de lápiz y papel, sin calculadoras.

Claro. Parece evidente que la profesora piensa que la máquina es un enemigo de las matemáticas, que al usar la calculadora, los alumnos se alejan de las matemáticas, ya que éstas consisten en... practicar algoritmos de lápiz y papel... que no son igual en otros países... que no son únicos... pero que, por tradición, bastantes profesores siguen pensando que si no se hacen bien entonces no se sabe matemáticas,... Sin embargo, Sonia nunca explicó a sus alumnos las propiedades de las operaciones en las que se basan los algoritmos de lápiz y papel con los que tortura a sus alumnos... Siempre les dijo... se hace así... la regla es así... Y los alumnos se preguntaban... Pero..¿Por qué se hace así? ¿Cuál es el sentido común en todo esto?

Claro que... ¿matemáticas y sentido común van juntos?

Y entonces, en este punto, hay que preguntarse algunas cuestiones: Si las calculadoras son enemigas de las matemáticas, ¿cómo es que son los matemáticos los que más demandan mejoras en la tecnología de las calculadoras? ¿Cómo es que fue un matemático quien inventó la primera máquina de calcular? ¿Cómo es posible que históricamente matemáticos avezados hayan usado regularmente diversas tecnologías, tales como la regla de cálculo, las primeras calculadoras y, ahora, sofisticados ordenadores en sus investigaciones?

Si no uso la calculadora, pierdo un montón de matemáticas. Por ejemplo, con la calculadora gráfica puedo visualizar dinámicamente lugares geométricos, cosa que hace unas cuantas décadas era prácticamente imposible, ya que los lugares geométricos quedaban relegados al terreno del álgebra. Ahora el álgebra "SE VÉ", lo que es una gran ventaja, porque VIENDO ÁLGEBRA APRENDEMOS ÁLGEBRA. Esta es la gran propiedad de las calculadoras gráficas... son gafas que permiten visualizar cosas que permanecían ocultas dentro del pantanoso terreno de las fórmulas y ecuaciones.

Lo que sigue es una pequeña colección de ejemplos... En ellos se pretende ver que algunos problemas más o menos difíciles se pueden tratar de manera VISUAL con la calculadora gráfica, lo que abre el camino a una nueva enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, un camino alejado del imperio algebraico al que estaba sometida su enseñanza y aprendizaje en los últimos siglos. En definitiva, HA LLEGADO ELMOMENTO DE HACER CONEXIONES. Veámos.

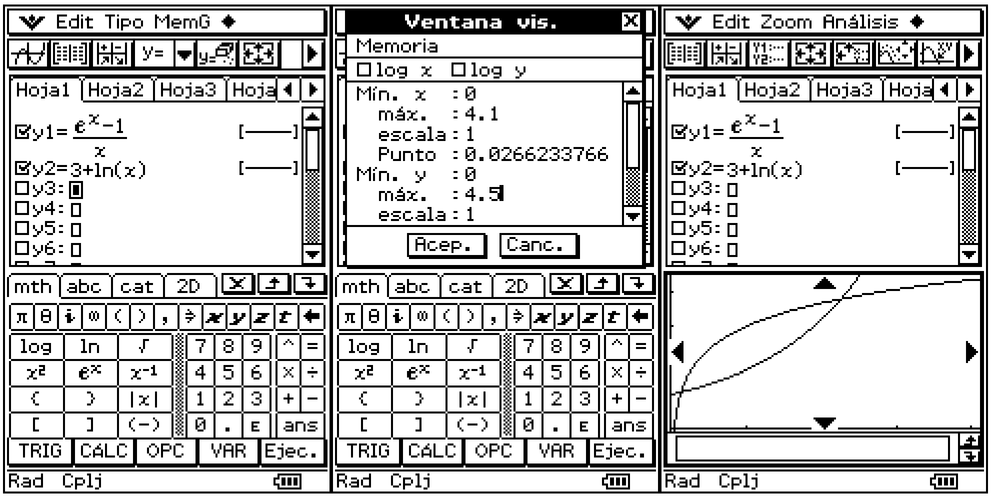
1.- RESOLVIENDO UNA INECUACIÓN

Considera la función f, de dominio R – {0}, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

El conjunto de soluciones de la inecuación f(x) ≤ 3 + ln x es un intervalo cerrado [a, b]. Utilizando la calculadora gráfica, determina gráficamente los valores de a y b, redondeados a las centésimas. Presenta los resultados obtenidos en tu calculadora, incluyendo los gráficos y las coordenadas relevantes de algunos puntos.

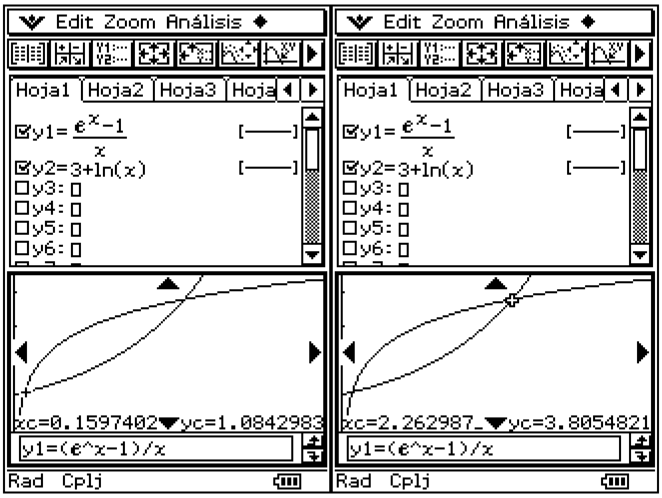
RESOLUCIÓN

Introducimos en Y1 la expresión $\dfrac{e^x - 1}{x}$ y en Y2 la expresión 3 + ln x. Utilizamos la siguiente ventana de visualización.



Para calcular el valor de a y b, basta hallar los puntos de intersección de los dos gráficos. Las abcisas de los puntos encontrados serán los valores de a y b.

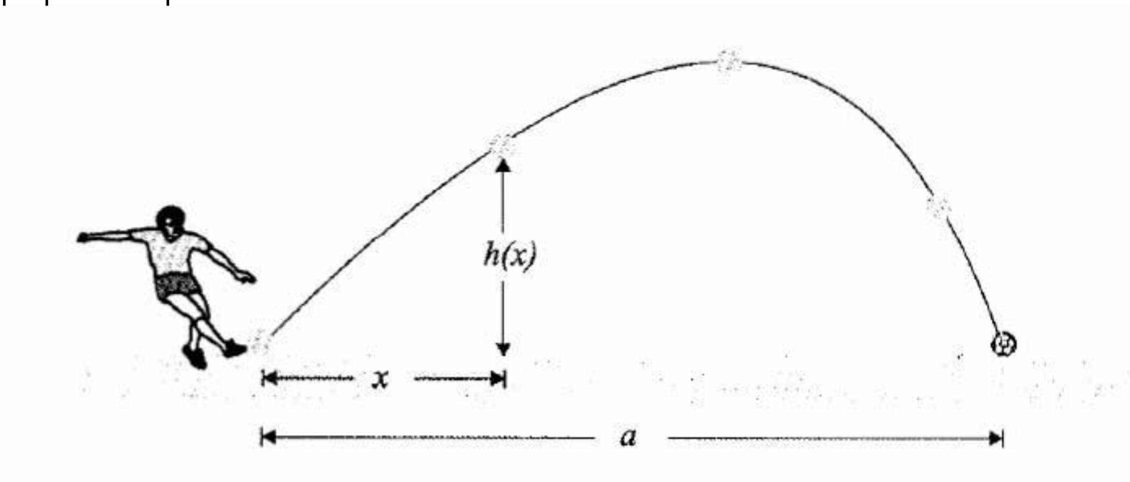
Seleccionamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Intersección, obteniendo los siguientes resultados:



Vemos que a=0,15 y b=2,27, aproximadamente.

2.- EL BALÓN DE FÚTBOL

En la figura está representada la trayectoria de un balón de fútbol después de haber sido golpeada por un jugador de la selección española, durante un encuentro de preparación para la EURO-2012.

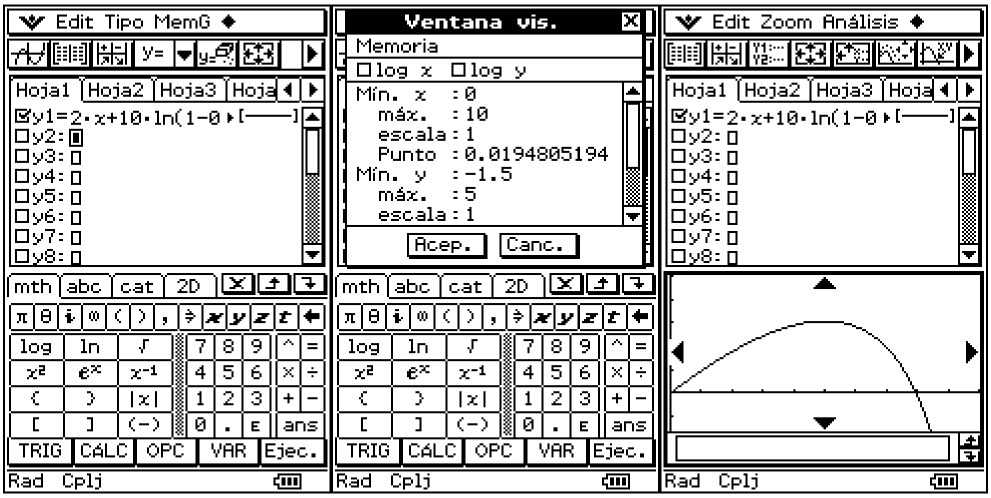


Designamos por a la distancia, en metros, entre el punto donde el balón fue golpeadp y el punto donde cae. Considera la función h definida en [0, a] por h(x)=2x+10 ln (1 – 0.1x).
Admitimos que h(x) es la distancia, en metros, del balón al suelo, en el momento en que su proyección sobre el suelo se encuentra a x metros del lugar donde fue golpeado.

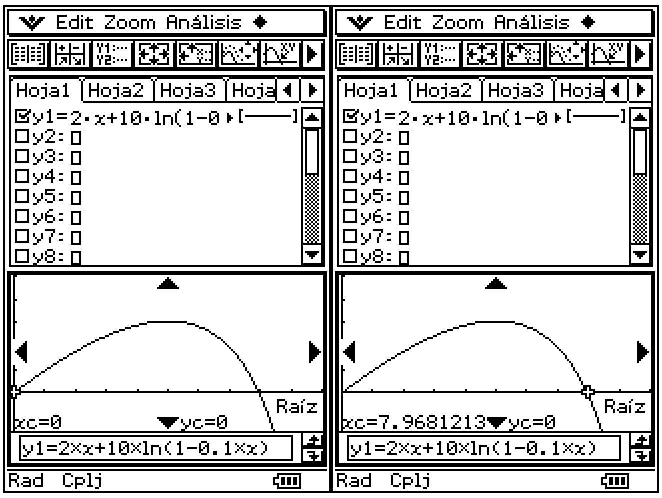
Utilizando la calculadora gráfica, determina el valor de a, redondeando a las décimas. Explica cómo lo haces, presentando todos los gráficos obtenidos con la calculadora.

RESOLUCIÓN

Se pretende encontrar la solución de la ecuación h(x)=0
En el menú Gráficos y tablas, introducimos la fórmula de la función Y1 = 2x + 10 ln(1-0,1x)
Visualizamos la gráfica con la siguiente ventana de visualización:



Para calcular el cero de esta función, usamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Raíz.



En el momento en que el balón fue lanzado, la altura a la que se encontraba del suelo era de cero metros. Lo mismo se verifica en el momento en que cae. Vemos que a = 7,97.

3.- RESIDUOS

La empresa FUTUROLIMPO quiere saber el tiempo necesario para la recogida selectiva de residuos en una zona residencial. Para ello selecciona, aleatoriamente, una muestra de 22 registros de los tiempos necesarios para esa recogida.

El diagrama de tallo y hojas siguiente representa los 22 registros de los tiempos, en minutos, que fueron necesarios para la recogida selectiva de los residuos. En el tallo, se muestra el valor de las decenas y, en las hojas, el valor de las unidades de cada registro.

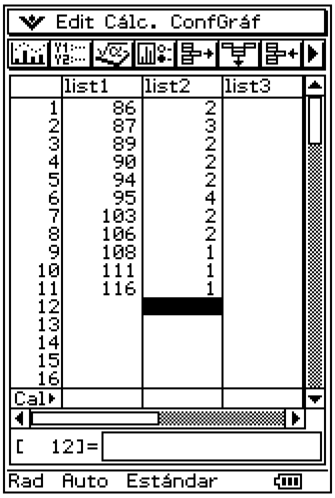
8	6	6	7	7	7	9	9	
9	0	0	4	4	5	5	5	5
10	3	3	6	6	8			
11	1	6						

1) Utilizando la calculadora gráfica, determina el valor de la media ($\overline{X}$) y el valor de la desviación típica (s) del tiempo necesario para la recogida selectiva de los residuos. Presenta el valor de la desviación típica redondeando a las centésimas.

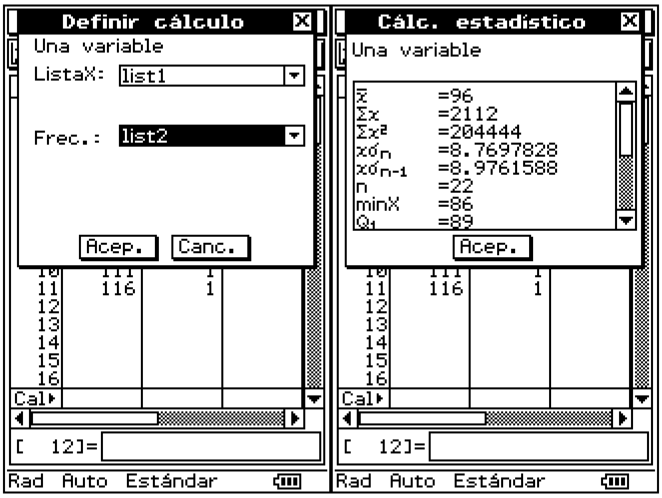
2) Determina el porcentaje de tiempos necesarios para la recogida selectiva de residuos que pertenecen al intervalo [$\overline{X}$ - s, $\overline{X}$+s]. Presenta el resultado redondeando a las unidades.

RESOLUCIÓN

1) Introducimos los valores en el menú Estadística de la calculadora:



Seleccionamos el comando Cal / Una variable e introducimos List1 como la lista X y List2 como la lista de frecuencias.



Vemos que la media es $\overline{X} = 96$ minutos y la desviación típica muestral es aproximadamente. $X_{\sigma_n} = 8{,}98$ minutos.

2) En el intervalo ($\overline{X} - s\,, \overline{X} + s$) = (96 – 8.98, 96+8.98)=(87.02, 104.98) contabilizamos 12 minutos, lo que representa un porcentaje de $\left(\dfrac{12 \times 100}{22}\right) = 55\%$

4.- PESCANDO EN UN ESTANQUE

Supongamos que, en un estanque, existen 300 rodaballos y 200 truchas.

1) Se pesca un pez del estanque. Suponemos que cada pez tiene igual probabilidad de ser pescado. ¿Cuál es la probabilidad de pescar un rodaballo?

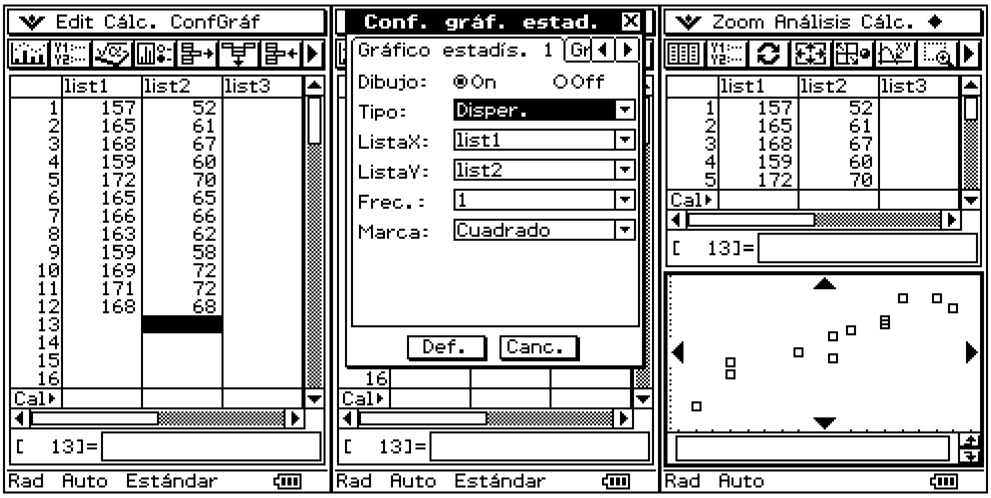
2) Se retiraron del estanque doce rodaballos. Los valores de las respectivas longitudes y pesos son los que están en la siguiente tabla:

Comprimento a **(em mm)**	157	165	168	159	172	165	166	163	159	169	171	168
Peso p **(em g)**	52	61	67	60	70	65	66	62	58	72	72	68

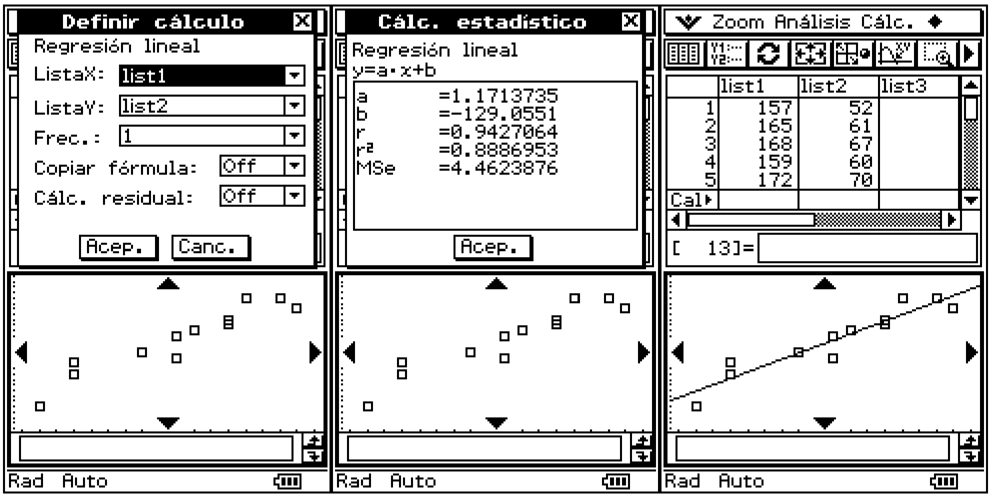
Utilizando la calculadora gráfica, determina el coeficiente de correlación lineal entre las variables a y p, redondeando a las centésimas. Interpreta el valor obtenido, teniendo en cuenta la nube de puntos que se puede visualizar en la calculadora.

RESOLUCIÓN

Introducimos los valores de la tabla en las listas del menú Estadística. Antes de diseñar el gráfico debemos configurar los diversos parámetros que se indican en la siguiente figura (a través del menú ConfGraf / Opciones)



Ajustamos esta nube de puntos usando un modelo de regresión lineal. Para ello usamos el comando Calc / Regresión lineal, obteniendo:



Vemos que el coeficiente de correlación lineal es r=0.9427, mientras que el coeficiente de determinación es $r^2 = 0.8887$, es decir, este modelo explica un 89% de la variabilidad de los datos. Por tanto, existe una correlación positiva fuerte entre la longitud y el peso de los rodaballos.

5.- COMPETICIÓN DE AJEDREZ

El gestor de la competición, decidió estudiar la evolución del número de jugadores de ajedrez, desde el inicio de la competición hasta la sexagésima semana, para lo cual fue registrando el número de jugadores, de cinco en cinco semanas, obteniendo la siguiente tabla:

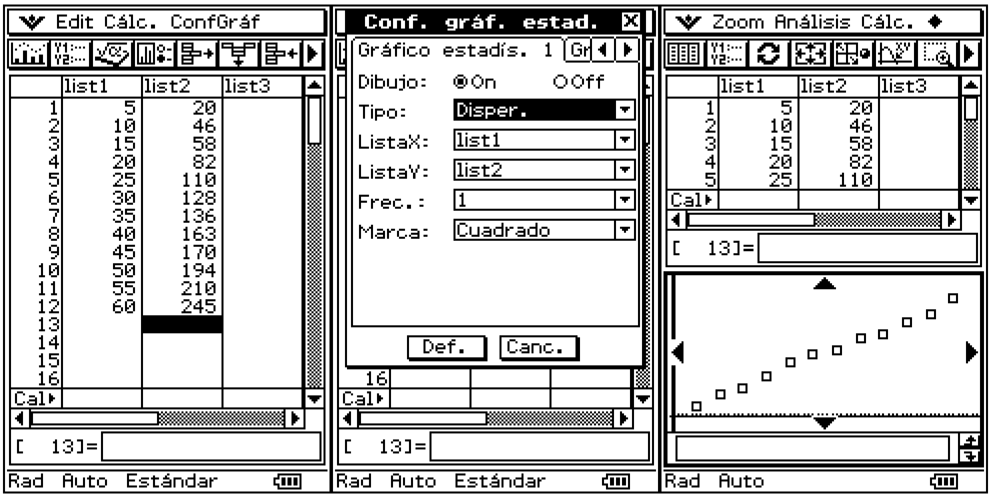
Tempo (em semanas) (x)	Número de jogadores (em milhares) (y)
5	20
10	46
15	58
20	82
25	110
30	128
35	136
40	163
45	170
50	194
55	210
60	245

Representa en la calculadora gráfica el diagrama de dispersión de los datos y determina la ecuación de la recta de regresión y = a x + b, indicando los valores de a y b con una aproximación a las centésimas. Dibuja aproximadamente en el papel los diagramas obtenidos con la calculadora, incluyendo la recta de regresión.

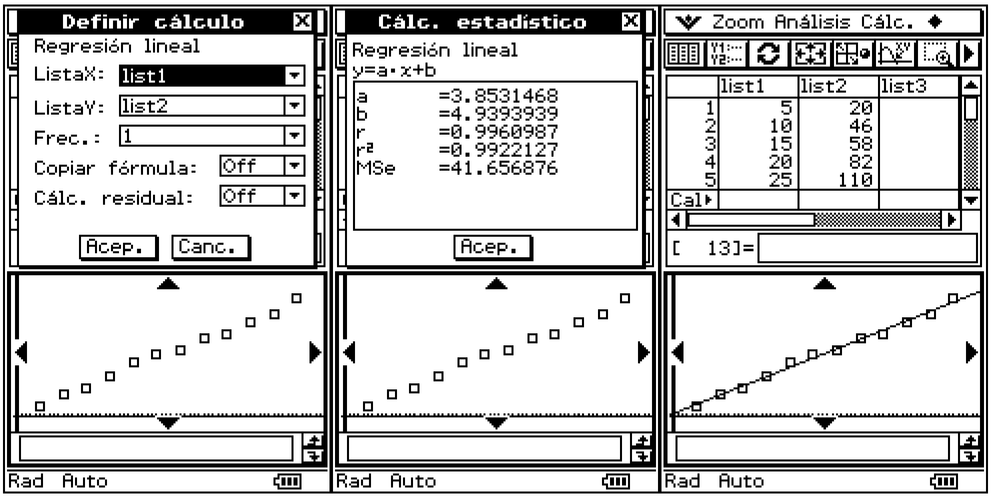
RESOLUCIÓN

En el menú de Estadística, introducimos los valores en la lista 1 y en la lista 2, donde la primera representa el tiempo y la segunda el número de jugadores.

Después de tener los datos introducidos, seleccionamos el comando ConGraf / Opciones para definir las opciones del gráfico que se muestran a continuación.



El gráfico sugiere que un buen modelo de ajuste es el modelo lineal. Seleccionamos el comando Calc / Regresión lineal y obtenemos las siguientes pantallas:



La recta de regresión es Y=aX+b, siendo a=3.85 y b=4.94; es decir, la recta de ecuación Y=3.85X+4,94. El coeficiente de correlación lineal es r=0.996, con un coeficiente de determinación $r^2 = 0{,}992$, es decir, el modelo lineal explica un 99% de la variabilidad de los datos.

6.- VENTA DE BILLETES

Un campo de fútbol debe tener una bancada destinada a los socios, que tenga cabida para 4000 espectadores. Si por cada billete se piden 10 euros, se prevé que las entradas de esas localidades queden agotadas. Basándose en experiencias anteriores, se sabe que si el precio de cada billete aumenta un cierto porcentaje, x, sobre el valor base (10 euros), el número de espectadores baja la mitad de ese porcentaje. Por ejemplo, si el precio de los billetes aumenta un 10%, x=0,1, el número de espectadores sufre un descenso del 5%.. Suponiendo cierto el modelo anterior y considerando siempre un aumento porcentual, x, sobre el precio base (10 euros), responde las siguientes cuestiones:

1) Comprueba que, si x es el aumento porcentual del precio de cada billete para estas localidades, la rentabilidad por la venta de billetes R, está dada por:

$$R(x) = -20000\,x^2 + 20000\,x + 40000, \text{ con } 0 \le x \le 2$$

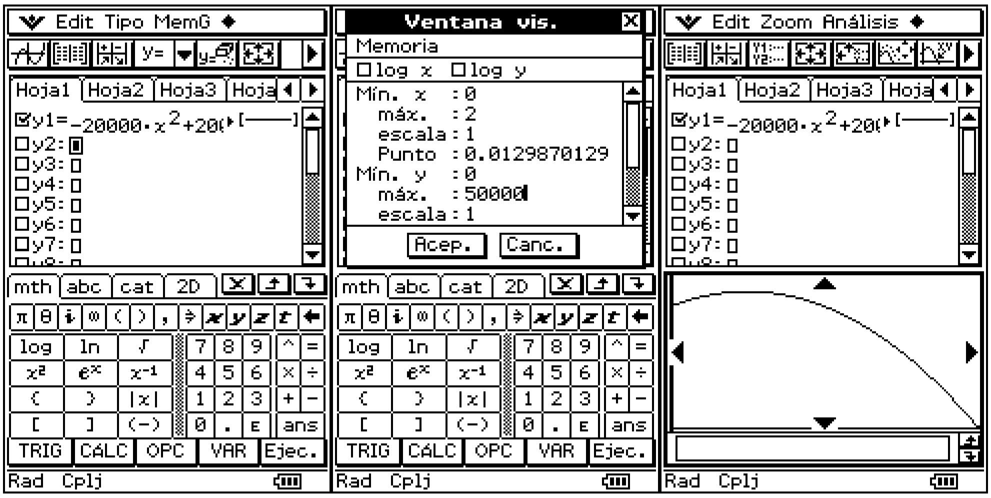
Ten en cuenta que:

- El precio de cada billete, p, en función del aumento porcentual, x, está dado por p(x)=10(1+x)
- El número de espectadores, n, en función del aumento porcentual, x, está dado por n(x)=4000 – 2000 x.

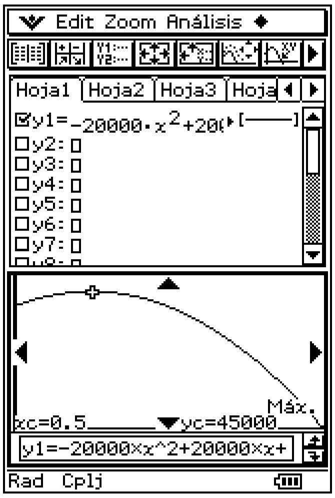
2) Uno de los directivos del club sugiere que el precio de cada billete sea de 20 euros, para ser maximizadas las ganancias. Pero un segundo directivo se opone, diciendo que lo ideal es mantener el precio de cada billete en 10 euros. Utiliza la calculadora gráfica para averiguar cuál de los dos tiene razón, incluyendo en la respuesta los gráficos que hayas obtenido con la calculadora

RESOLUCIÓN

2) Para saber cuál es el valor del porcentaje *x* que la dirección debe aplicar para conseguir maximizar los ingresos por billetes, debemos hallar el máximo de la función. De esta forma, introducimos la expresión en el editor de funciones. La ventana de visualización debe tener la siguiente configuración

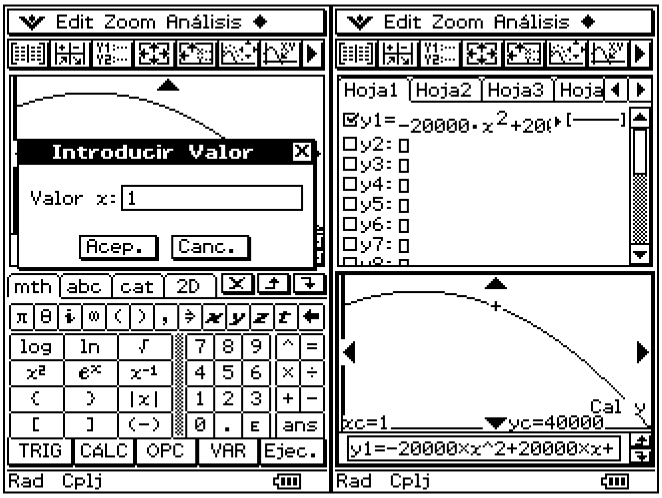


Con el gráfico diseñado, vamos a calcular el máximo, usando el comando Análisis / Resolución gráfica / Max.

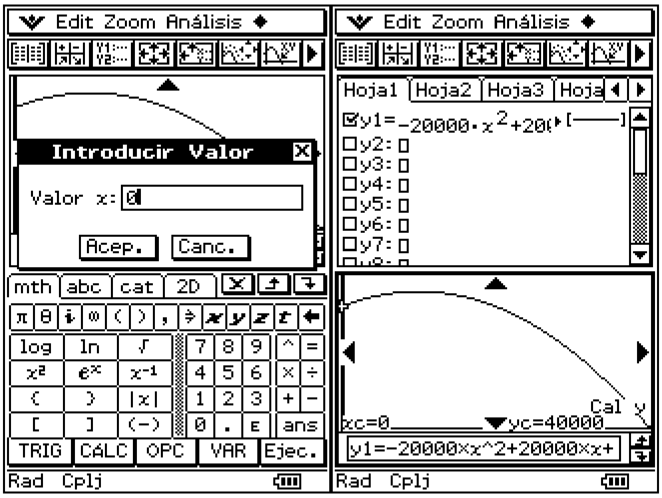


Así podemos verificar que para maximizar el valor de los ingresos por billetes se debe aumentar el precio del billete en un 50%, obteniéndose un ingreso de 45000 euros.

Uno de los directores sugiere que el precio del billete pase a ser 20€, o sea, tenga un aumento de 100% (x=1). Si pedimos a la calculadora el valor de la ordenada cuya abcisa es 1, verificamos que en esta situación el ingreso obtenido es de 40.000€ (Hay que elegir el comando Análisis / Resolución gráfica / CalY, dando a X el valor 1)



El otro director sugiere que se mantenga el precio del billete en 10 euros, o sea, que no haya aumentos (X=0). En este caso, al pedir la ordenada del punto cuya abcisa es 0, verificamos que el ingreso obtenido es de 40.000€. (Hay que elegir el comando Análisis / Resolución gráfica / CalY, dando a X el valor 0)



Las propuestas de los dos directores son equivalentes. Ninguna de las dos propuestas maximiza el ingreso por la venta de billetes.

7.- DE CASA A LA ESCUELA

María siempre va en coche a la escuela, saliendo de casa entre las siete y media y las ocho de la mañana. Suponemos que, cuando María sale de casa t minutos después de las 7 y media, la duración del viaje, en minutos, está dada por

$$d(t) = 44 - \frac{5000}{t^2 + 275} \qquad (t \in [\, 0, 30 \,]$$

Las clases de María comienzan siempre a las ocho y media.

1) Demuestra que, si María sale de casa a las 7 h 45 m, llega a la escuela a las 8 h 19 m, pero, si sale de casa a las 7 h 55 m, ya llega retrasada a las clases.

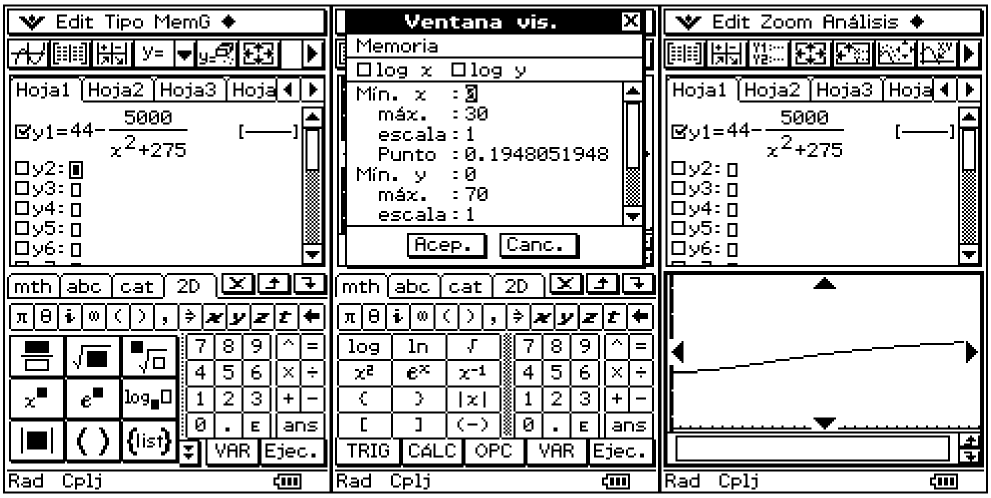
2) Utilizando la calculadora gráfica, averigua a qué horas puede María salir de casa,

de modo que no llegue tarde a las clases.

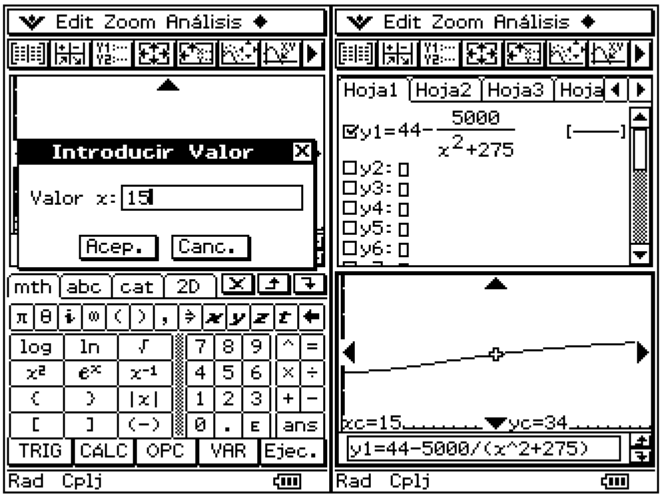
RESOLUCIÓN

Introducimos la expresión en el editor de funciones. Configuramos la ventana de visualización basándonos en los valores del dominio dados en el enunciado.

1) Si María sale de casa a las 7h 45m, salió 15 minutos después de las 7h 30m, Por tanto t=15.

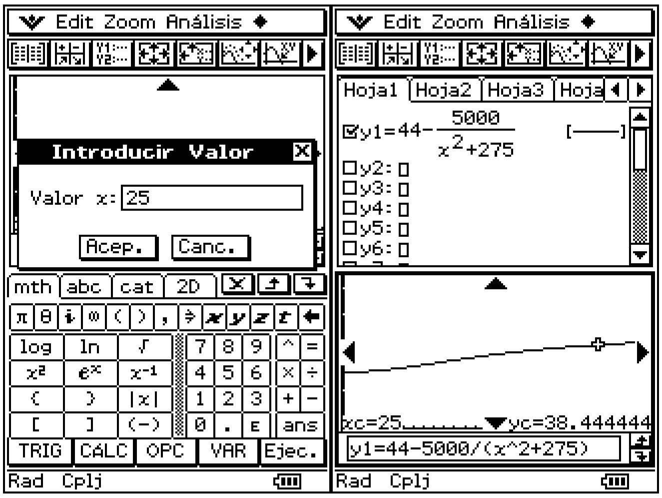


Usamos el cursor de recorrido e introducimos el valor de X=15.



Así, la duración del viaje es de 34 minutos, llegando a clase a las: 7h 45m + 34m = 8h19m

Si sale a las 7h55m, salió 25 minutos después de las 7h30m, es decir t=25.

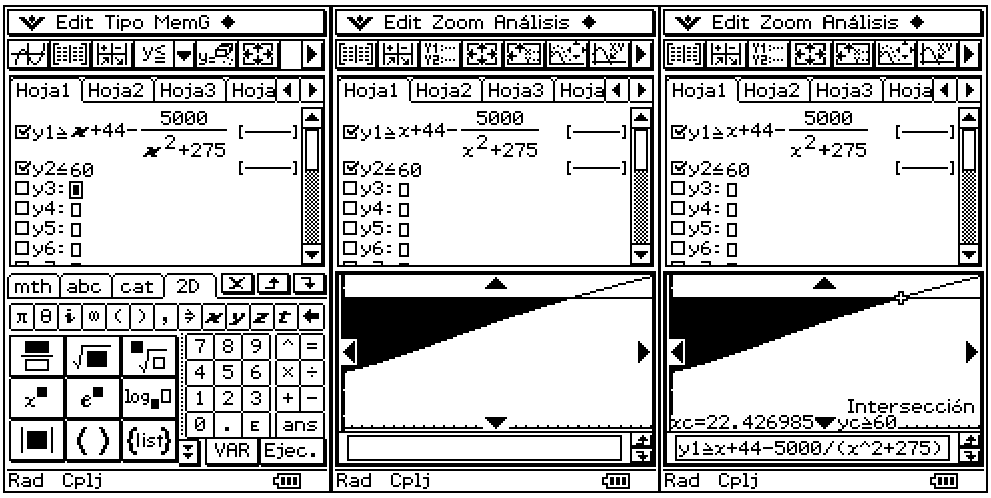


El viaje tendrá una duración de 38.4 minutos, llegando atrasada a clase. (7h55+38.4m=8h33).

Para que Maria no llegue atrasada, el tiempo que transcurre desde que sale de casa (*t*) hasta que llega à escuela (*d(t)*) no puede exceder de 60 minutos . t + d(t) $\leq$ 60
Así pasamos a tener la siguiente ecuación:

$$t + 44 - \frac{5000}{t^2 + 275} \leq 60$$

Vamos a introducir las expresiones en el menú gráfico de la calculadora y a obtener el punto de intersección. Para ello, usamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Intersección.



Para que Maria no llegue atrasada a las clases tiene que salir de casa 22 minutos después de las 7h30, o sea, tiene de salir a las 7h52m.

8.- FUNCIÓN POLINÓMICA

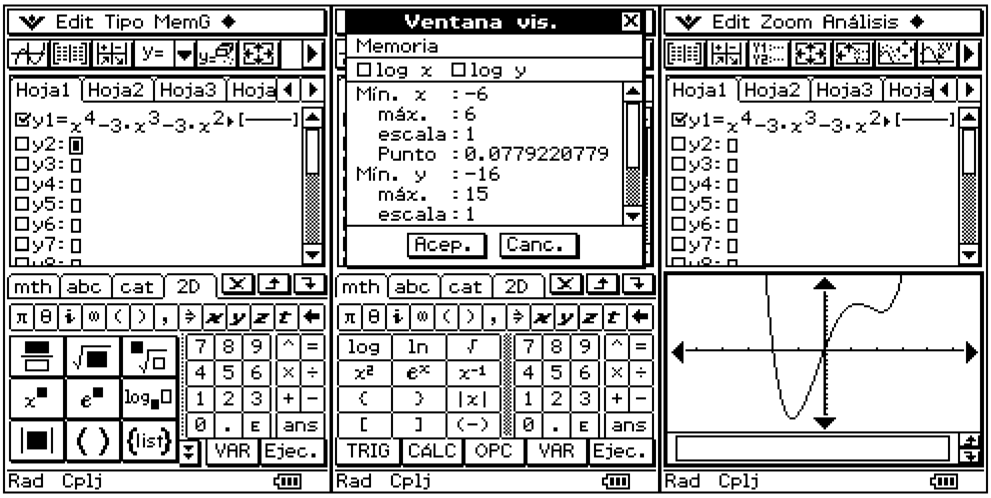
Sea f una función de dominio R definida por $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$. Se sabe que el gráfico de f corta al eje OX solamente en dos puntos. Uno de ellos tiene abcisa –2.

1) Descompón el polinomio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ en un producto de tres polinomios, siendo dos de primer grado y uno de segundo grado.

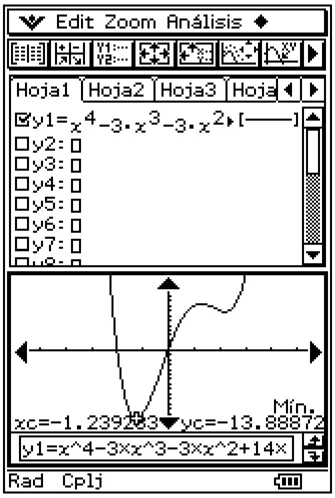
2) El recorrido de f es un intervalo de la forma [a, +∞[. Utilizando la calculadora gráfica, determina el valor de a, redondeado a las décimas. Reproduce el gráfico de f visualizado en la calculadora, después de elegir una ventana que permita visualizar el punto relevante para la resolución del problema. Señala ese punto en el gráfico.

RESOLUCIÓN

2) Introducimos la expresión en el menú Gráficos y tablas. Consideramos la ventana de visualización siguiente.



Seleccionamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Mín. para obtener el mínimo absoluto de la función.



El rango o recorrido de la función es [–13.9, +∞ [

9.- UN RELOJ

En la figura está representado un reloj de una estación de tren. El reloj es un círculo que está apoyado en una barra. Se sabe que, t segundos después de las 0 horas:

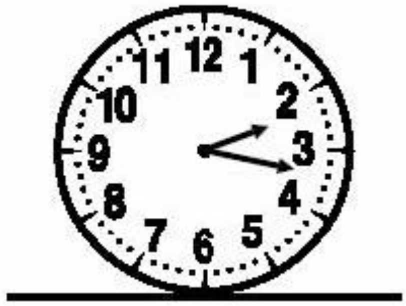
- La distancia (en metros) del extremo del horario a la barra está dada por

$$h(t) = 1 + \frac{5}{10}\cos\left(\frac{\pi}{21600} \cdot t\right)$$

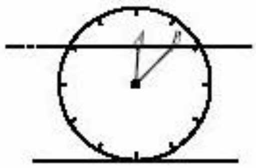
- La distancia (en metros) del extremo del minutero a la barra, está dada por

$$m(t) = 1 + \frac{7}{10}\cos\left(\frac{\pi}{1800} \cdot t\right)$$

Tanto en h como en m, el argumento de la función coseno está expresado en radianes.



Sea A el extremo del horario y sea B el extremo del minutero. Tal como indica la figura adjunta, pasado poco tiempo desde las 0 horas, la recta AB es paralela a la barra en la cual está apoyado el reloj. Poco antes de 1 hora (de la mañana) hay otro instante en que esto ocurre. Determínalo, presentando el resultado en horas, minutos y segundos (los segundos redondeados en unidades). Expresa el problema con una ecuación y utilizando la calculadora gráfica, resuelve la ecuación obtenida.



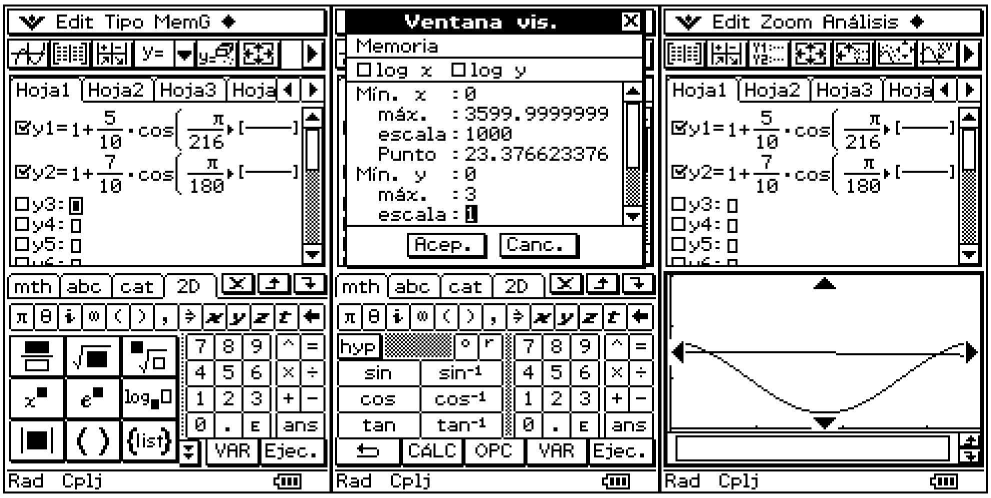
RESOLUCIÓN

Vamos a colocar las funciones *h(t)* y *m(t*) en el editor de funciones.

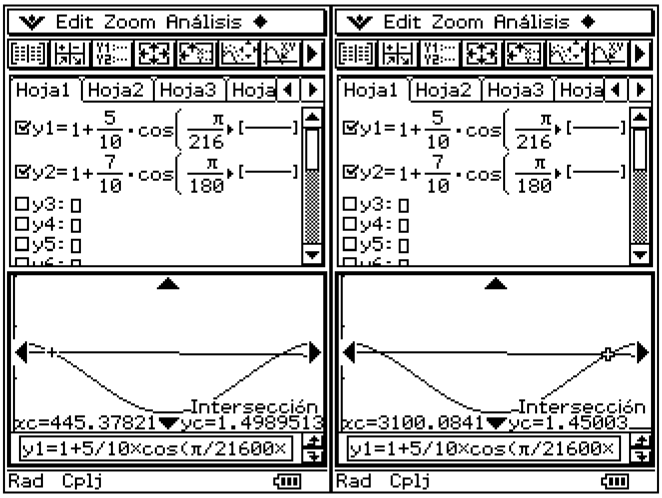
En la configuración de la ventana de visualización vamos a tener como referencia el hecho de que 3600 segundos corresponden a 1 hora, luego el *Xmax* debe contener el valor “3600”

La recta *AB* es paralela a la barra cuando la distancia de la extremidad del puntero de los minutos à la barra es igual a la distancia de la extremidad del puntero de las horas a la barra.

Los instantes en que, en la primera hora del día, esa distancia es la misma son las soluciones de la ecuación *m(t)=h(t)*, en el intervalo [0 , 3600].



Después de introducir las expresiones en el editor de gráficos vamos a hallar el punto de intersección de las dos funciones. Para ello, seleccionamos el comando Análisis / Resolución Gráfica / Intersección.



De la observación del gráfico, podemos concluir que, en la primera hora del día, hay dos instantes en que la recta *AB* es paralela a la recta *r*. El instante pedido ocurre 3100 segundos después de las cero horas.

Como el instante ocurre 3100 segundos después de las cero horas, vamos a verificar el resultado en horas minutos y segundos:

En la pantalla Principal de la ClassPad podemos verificar cuantos minutos corresponden a 3100 segundos. Comprobamos que **los 3100 segundos corresponden a 0h 51m 40s**.

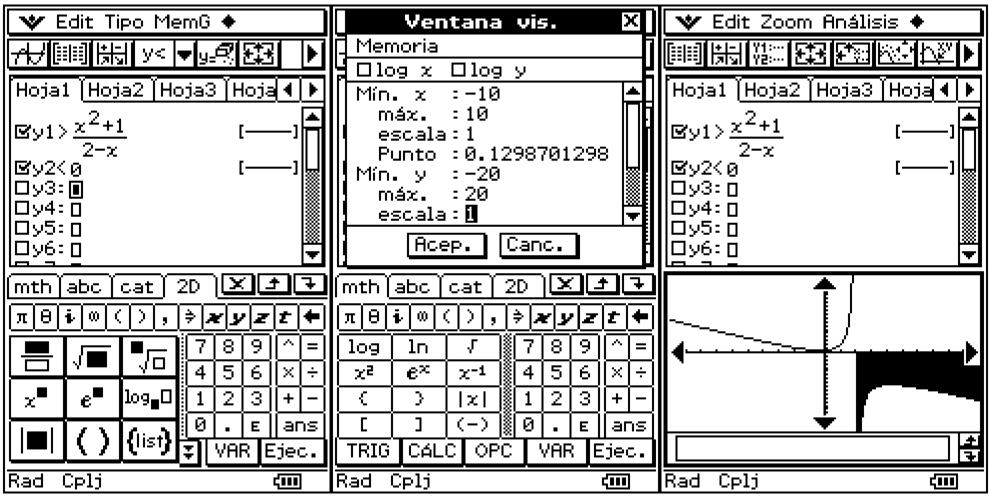
10.- SOLUCIONES DE UNA INECUACIÓN

Con ayuda de la calculadora gráfica, indica el conjunto de números reales que son soluciones de la inecuación $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

A) (–1, 2) B) (1, 2) C) (–∞, 2) D) (2, +∞)

RESOLUCIÓN

Introducimos las siguientes expresiones en el menú gráfico. Con la ventana de visualización configurada de la siguiente forma.



Podemos verificar que la solución es: (D) (2, +∞)

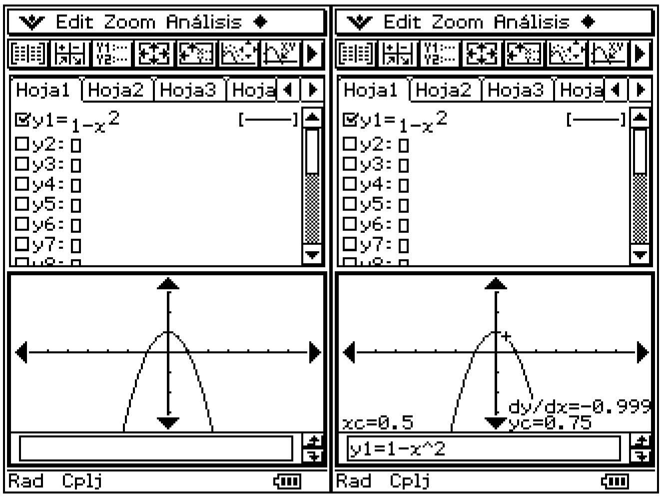
11.- RECTA TANGENTE

Considera la función f, de dominio R, definida por $f(x) = 1 - x^2$. Sea t la recta tangente al gráfico de f en el punto de abcisa 1/2 . ¿Cuál es la inclinación de la recta t? Ayúdate de la calculadora gráfica para razonar tu respuesta.

A) 30º B) 45º C) 135º D) 150º

RESOLUCIÓN

Después de tener el gráfico diseñado podemos hallar la recta tangente en el ponto ½. Configuramos el formato básico para que la derivada esté activa. Al hacerlo la calculadora devuelve la ecuación de la tangente. Verificamos que la pendiente de la recta es -1 por lo que su inclinación es 180º-45º=135º. (respuesta C)



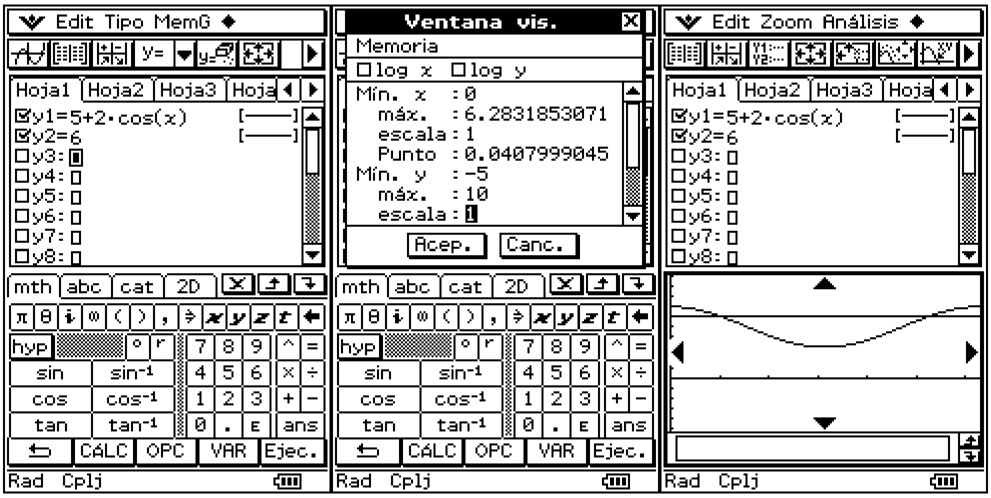
12.- ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Utilizando la calculadora gráfica, indica las soluciones de la ecuación 5 + 2 cos x = 6 que pertenecen al intervalo [0, 2π]

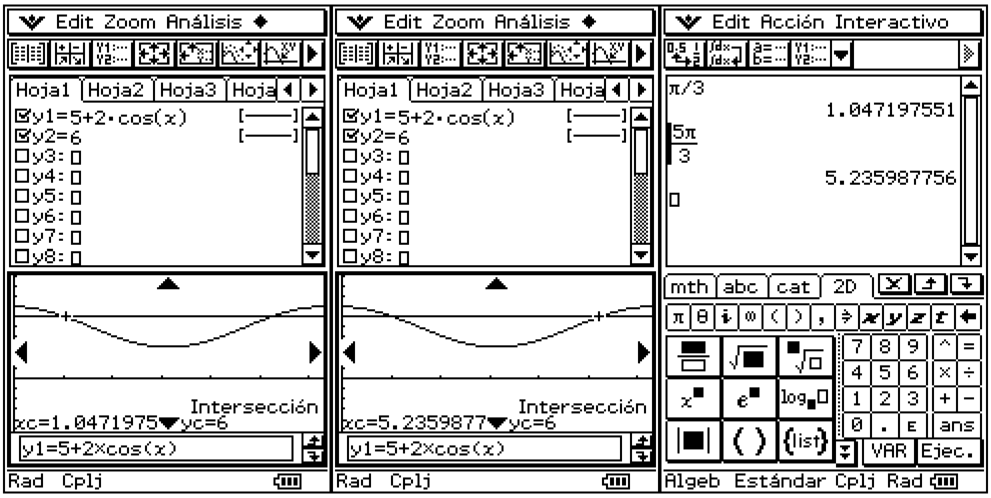
A) $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ o $\frac{7\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{6}$ o $\frac{11\pi}{6}$

RESOLUCIÓN

Utilizando la siguiente ventana de visualización podemos obtener el siguiente gráfico.



Para hallar los puntos de intersección, seleccionamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Intersección, obteniendo los dos puntos:



Vemos que la respuesta correcta es la (B)

13.- ENSAYOS DE UN MOTOR

Durante los ensayos de un motor, la velocidad de rotación de su eje varia, a lo largo de los primeros ocho minutos del experimento, de acuerdo con la función:

$$v(t) = t^3 - 15 \cdot t^2 + 63 \cdot t$$

donde t representa el tiempo (medido en minutos), contado a partir del inicio de la experiencia, y v(t) representa la velocidad de rotación del eje del motor (medida en centenas de rotaciones por minuto).

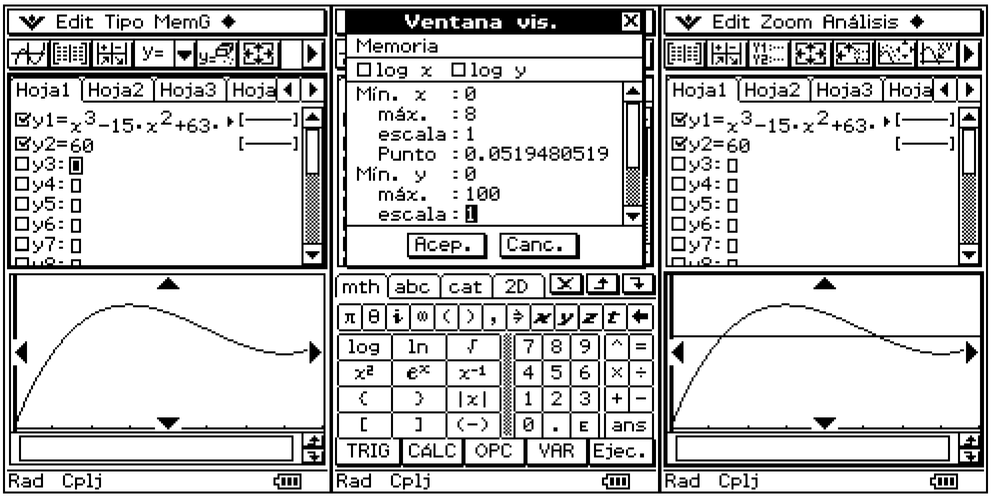
1) Determina cuál fue la velocidad máxima alcanzada en los primeros ocho minutos de la experiencia. Presenta el resultado en centenas de rotaciones por minuto.

2) Utilizando la calculadora gráfica, determina durante cuánto tiempo, en los ocho primeros minutos de la experiencia, la velocidad de rotación del eje del motor fue superior a 6000 rotaciones por minuto. Escribe el resultado final en minutos y segundos.

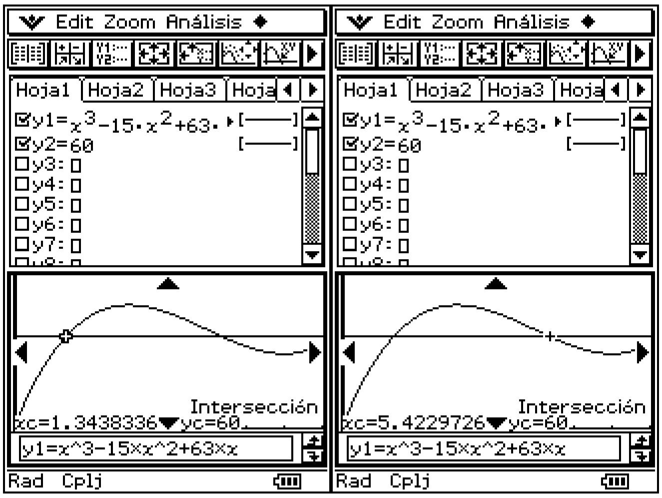
RESOLUCIÓN

Observamos que 6000 rotaciones por minuto es igual a 60 centenas de rotaciones por minuto. De esta forma tenemos que resolver la inecuación v(t)>60

Vamos a introducir las siguientes expresiones en la calculadora gráfica, incluyendo la siguiente ventana de visualización.



Vamos a hallar los puntos de intersección de la recta con el gráfico de *v(t).* Para ello, seleccionamos el comando Análisis / Resolución gráfica / Intersección.



La velocidad de rotación del eje del motor fue superior a 6000 rotaciones por minuto durante 5.42-1.34 minutos, o sea, durante 4.08 minutos.

Haciendo:

0.08 minutos ---------- 1 minuto
X segundos ----------- 60 segundos

Entonces, 0.08x60=5

Concluimos que la velocidad de rotación del eje del motor fue superior a 6000 rotaciones por minuto durante 4 minutos y 5 segundos.

NOTA: Todos los problemas de este artículo han sido propuestos literalmente en las pruebas de Selectividad de Portugal en los últimos años. En esas pruebas es obligatorio el uso de la calculadora gráfica. Aquí hemos dado un paso más, resolviendo los problemas con la calculadora ClassPad 330, que dispone de sistema CAS.