El mètode dels invariants

Imaginau un sistema on podeu efectuar una sèrie d'operacions, i voleu estudiar les possibles configuracions a les que es pot arribar (usualment, per excloure'n alguna, o demostrar que sempre s'arriba a una configuració fixada). En aquests casos, és útil poder detectar un *invariant* o un *monovariant* del sistema:

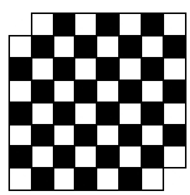
- Un *invariant* és un aspecte del sistema (per exemple, un valor numèric, una propietat, alguna simetria) que no canvia quan efectuam les operacions permeses. Aleshores, per exemple, si en la configuració inicial i en la configuració final desitjada aquest invariant pren valors diferents, és impossible passar de la primera a la segona.
- Un *monovariant* és un valor numèric que varia monòtonament (sempre creix estrictament o sempre decreix estrictament) quan efectuam les operacions permeses. Aleshores, per exemple, si aquest monovariant creix estrictament a cada operació però està fitat superiorment, prest o tard haurem d'aturar. I llavors per ventura un invariant us permet dir qualque cosa sobre la situació d'aturada.

Vegem alguns exemple senzills:

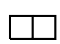
1) Tres persones, A, B i C, juguen una sèrie de partides d'un joc. En començar, A té 10 euros, B té 20 euros i C té 30 euros. A cada partida, el guanyador rep un euro de cada un dels altres jugadors. Si qualcun es queda sense doblers, continua jugant "a crèdit", és a dir, amb valors negatius. Pot ser que a qualque moment els tres jugadors tenguin 15 euros cadascun?

Fixau-vos que la suma total d'euros en joc no varia (és un *invariant*), per tant és impossible passar d'una suma total de 60 euros a una de 45 euros.

2) Considerau un escaquer usual de $8 \times 8 = 64$ caselles al que hem llevat dues caselles a cantons diagonalment oposats. Per exemple:



Demostrau que no podeu recobrir-lo amb peces com les de la figura següent (on cada quadrat de la peça ocupa exactament una casella del tauler, i les peces no es poden superposar):



Les dues caselles que llevam són del mateix color, posem per fixar idees que són negres, com al dibuix. Diguem B_k i N_k al nombre de caselles blanques i negres, respectivament, que hi ha sense cobrir després d'haver posat k peces. Com que cada peça tapa una casella blanca i una negra, tenim que $N_{k+1} = N_k - 1$ i $B_{k+1} = B_k - 1$, i per tant la diferència $B_k - N_k$ roman constant al llarg del procés: és un invariant del nostre sistema.

Ara bé, al començament, quan no hi ha cap peça, $B_0 - N_0 = 2$ (hem llevat dues caselles negres, per tant hi ha dues caselles blanques més que no de negres), i si aconseguíssim tapar tot el tauler, al final tendríem $B_{31} - N_{31} = 0$ (perquè per cobrir les 62 caselles restants necessitam 31 peces, i si està tot cobert, $B_{31} = N_{31} = 0$). Això és impossible, perquè mentre anam cobrint el tauler, el valor $B_k - N_k$ és invariant i per tant es manté igual a 0.

3) En aquest joc, començant amb un nombre natural qualsevol, podem efectuar qualsevol de les tres operacions següents:

- Sumar alguns dels seus dígits consecutius, i substituir-los pel resultat. Per exemple, a 3462489, podríem fer $6 + 2 + 4 = 12$ i substituir el 624 per 12: $3462489 \to 341289$.
- Descompondre qualque bocí en suma d'altres números, i substituir aquest bocí per la concatenació d'aquests nombres. Per exemple, a 3462489, podríem fer $46 = 20 + 4 + 22 + 0 + 0$ i substituir el 46 per 2042200: $3462489 \to 320422002489$.
- Permutar els dígits. Per exemple, $3462489 \to 6442893$.

El joc que us propòs és, donat dos nombres, mirar d'efectuar una seqüència d'operacions d'aquestes que passi d'un a l'altre. Per exemple, podem anar de 2458 a 100? Sí:

$$2458 \to 11458 \to 1108 \to 208 \to 280 \to 100.$$

Podeu anar de 2459 a 100?

Observau que el residu mòdul 9 (que s'obté sumant-ne els dígits, tornant a sumar els dígits del resultat, i repetint aquest procés tantes vegades com calgui fins arribar a un nombre d'una sola xifra) és invariant per les nostres operacions. El residu mòdul 9 de 100 és 1, i el de 2459 és 2, per tant és impossible, partint de 2459, arribar a 100.

Per cert, exercici extra: *Podeu caracteritzar les parelles de nombres que podeu connectar per seqüències d'operacions d'aquest estil?*

4) Tenim una pastilla de xocolata de dimensions $m \times n$, i dos jugadors. Per torns, cada jugador pren una peça rectangular de xocolata i la xapa en dos bocins per la subdivisió entre els seus quadrats. El darrer jugador en jugar guanya. Qualcun dels dos jugadors té qualque estratègia guanyadora?

A cada jugada, una peça es divideix en dues, i per tant el nombre de peces augmenta en 1. Aquest és el nostre monovariant. En començar tenim una sola peça, per tant després de k jugades tendrem $k + 1$ peces. En acabar, tendrem els mn quadrats de la pastilla. Per tant, acabam sempre en $mn - 1$ jugades. Això mostra que si mn és parell, guanya el primer jugador, i si és imparell, guanya el segon.

5) Distribuïm 2012 persones a les habitacions d'un hotel amb 100 habitacions. A cada minut, i mentre no totes les persones estiguin a la mateixa habitació, qualque persona se'n va de la seva habitació a una altra on hi hagi com a mínim el mateix nombre de persones que a la seva. Demostrau que, prest o tard, totes les persones es trobaran en una mateixa habitació.

Sigui x_i el nombre de persones que hi ha en un moment determinat a l'habitació i-èsima. Si passa una persona de l'habitació k-èsima a l'habitació l-èsima (i per tant ha de passar que $x_l \geq x_k$), aleshores x_k canvia a $x_k - 1$ i x_l a $x_l + 1$. Observau ara què passa amb els quadrats:

$$(x_k - 1)^2 + (x_l + 1)^2 = x_k^2 - 2x_k + 1 + x_l^2 - 2x_l + 1 = x_k^2 + x_l^2 + 2(x_l - x_k) + 2 > x_k^2 + x_l^2$$

Per tant, quan una persona passa a una altra habitació, la suma $\sum_i x_i^2$ creix estrictament. Aquest és el nostre monovariant.

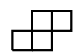
Ara bé, el nombre de possibles distribucions de 2012 persones en 100 habitacions és finita i per tant la suma $\sum_i x_i^2$ és fitada i no pot créixer indefinidament. Per tant, prest o tard s'arriba a una situació en què ningú no es pot moure. Però això només passa quan tothom està en una mateixa habitació.

Exercicis

6) Escrivim els nombres $1, 2, \ldots, 2012$ en filera i escrivim entremig d'ells signes + o − com volgueu. Pot ser el resultat final de l'operació que escriviu igual a 1?

7) Escrivim els nombres $1, 2, \ldots, 2012$ en un paper, i aleshores, a cada pas, triam dos nombres a, b, els esborram i els substituïm per $|a - b|$. Quan quedi només un nombre, serà forçosament parell, forçosament imparell, o pot ser qualsevol de les dues coses?

8) Tenim un tauler de $9 \times 9 = 81$ caselles quadrades. Quin és el nombre màxim de caselles d'aquest tauler que podem cobrir amb peces com les de la figura següent (aquestes figures són reversibles, i cada quadrat de la peça ocupa exactament una casella del tauler, i no es poden superposar):



9) Sobre un tauler infinit de caselles quadrades hi hem marcat un rectangle amb un dels costats de longitud (en caselles) un múltiple de 3. Col·locam sobre cada casella d'aquest rectangle una fitxa, i deixam buides la resta de caselles. Aquestes fitxes es poden matar les unes a les altres: una fitxa pot botar per sobre de la seva veïna de dalt, de baix, de la dreta o de l'esquerra (però no en diagonal!) si la casella següent en aquesta direcció està buida, i aleshores mata la fitxa sobre la que bota.

Demostrau que, jugueu com jugueu, mai no pot quedar una única fitxa sobre el tauler.

10) A cada un dels vèrtexs d'un cub li assignam un 1 o un -1, i assignam a cada una de les cares el producte dels quatre nombres dels seus vèrtexs. Podem fer una assignació inicial de nombres als vèrtexs de manera que la suma dels 14 nombres (8 dels vèrtexs més 6 de les cares) sigui 0?

11) En una taula disposam 13 cartes vermelles i 13 cartes negres, i jugam el solitari següent. A cada pas del joc, triam dues cartes a l'atzar i efectuam sobre elles un dels tres moviments següents:

- Si totes dues són negres, les substituïm per dues cartes vermelles
- Si totes dues són vermelles, les eliminam
- Si una és negra i l'altra vermella, llevam la carta negra i deixam la vermella.

Demostrau que amb qualsevol seqüència de jugades, sempre arribau a tenir només una carta vermella sobre la taula.

12) Tenim un escaquer 8×8 amb les seves caselles blanques i negres usuals. Ara podem canviar els colors de conjunts de caselles de les tres maneres següents:

- Podem canviar els colors de totes les caselles d'una filera
- Podem canviar els colors de totes les caselles d'una columna
- Podem canviar els colors de totes les caselles d'un quadrat 2×2

Podem aconseguir una única casella blanca?

13) Ens donen n punts blaus i n punts vermells en el pla, de manera que no n'hi hagi 3 d'alineats. Demostrau que sempre podem dibuixar n segments lineals que uneixin un punt plau amb un punt vermell sense tallar-se.

14) Escrivim diversos nombres naturals en un paper. A cada pas, triam dos nombres a l'atzar i

- Si un és múltiple de l'altre, n'esborram un
- Si cap dels dos no és múltiple de l'altre, els substituïm pel seu màxim comú divisor i el seu mínim comú múltiple.

Demostrau que sempre acabam amb un únic nombre.

15) En un recinte tancat hi tenim un conjunt de partícules que poden estar en tres estats diferents: positiu, negatiu i neutre. En començar, hi ha 30 partícules positives, 10 negatives i 17 neutres. Les partícules es mouen, i quan dues partícules de diferent tipus xoquen, totes dues es converteixen en partícules del tercer tipus. Existeix qualque seqüència de xocs que faci que al final totes les partícules siguin del mateix tipus?

16) En una illa hi tenim 13 camaleons grisos, 15 de marrons i 17 de vermells. Quan dos camaleons de colors diferents es troben, tots dos canvien al tercer color. Quan dos camaleons del mateix color es troben, no canvien de color. Cap altre canvi de color és possible. És possible que després d'una seqüències d'encontres, tots els camaleons siguin del mateix color?

17) Sobre una circumferència hi marcam $3n$ punts, i a cada punt hi escrivim un 0 o un 1, com vulguem. A cada pas, canviam un 1 per un 0 en un punt, i canviam les xifres als dos punts dels costats. Demostrau que si partim d'una configuració que només té un 1, mai no podem arribar a una configuració amb 0 a tots els punts.

18) Tenim un estadi buit. A cada minut, una persona entra o dues persones surten de l'estadi. Després d'un dia, pot ser que a l'estadi hi quedin 250 persones?

19) Tenim una taula $m \times n$ de nombres reals Quan la suma dels nombres d'una filera o d'una columna és < 0, podem canviar de signe tots els nombres d'aquesta filera o columna. Demostrau que si iteram aquesta operació, acabam obtenint una taula on totes les fileres i totes les columnes tenen suma ≥ 0.

20) Tenim una pastilla de xocolata de dimensions $m \times n$, i dos jugadors. Per torns, cada jugador pren una peça rectangular de xocolata, la xapa en dos bocins per la subdivisió entre els seus quadrats i es menja un dels bocins. El darrer jugador en jugar guanya. Qualcun dels dos jugadors té qualque estratègia guanyadora?

6) Tenim que $1+2+\cdots+2012 = 2012\cdot 2013/2 = 2025078$, parell. Si canviam el $+$ de davant d'algun número m per un $-$ en aquesta operació, al resultat final és com si li restàssim $2m$, i per tant segueix essent parell. Com que qualsevol operació $1\pm 2\pm 3\pm\cdots\pm 2011$ s'obté a partir de la suma inicial canviant alguns $+$ per $-$, i en aquests canvis la paritat del resultat és manté, totes aquestes operacions sempre donen nombres parells, per la qual cosa cap d'elles no pot donar 1.

7) Fixau-vos que, a cada pas, substituïm dos nombres per un, i per tant la quantitat de nombres decreix en un i en 2011 passes en quedarà només un. Què passa amb la suma S dels nombres escrits? Quan canviam a, b, suposem amb $a > b$, per $|a-b| = a-b$, el que fem és restar $a+b$ a S, i sumar-li $a-b$: és a dir $S \to S-(a+b)+a-b = S-2b$. Per tant la paritat de la suma dels nombres escrits en el paper no varia. En començar aquesta suma és $1+2+\cdots+2012 = 2012\cdot 2013/2 = 2025078$, parella. Per tant, en quedar només un nombre, haurà de ser per força parell.

8) Considerem el colorejat del tauler donat per la figura següent:

A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A
C	D	C	D	C	D	C	D	C
A	B	A	B	A	B	A	B	A

D'aquesta manera, cada vegada que col·locam una peça, tapam una A, una B, una C i una D. Ara bé, de As n'hi ha 25, de Bs, 20, de Cs, 20, i de Ds 16. Per tant, només podem col·locar 16 peces, que cobreixen 64 caselles. (I és fàcil fer-ho.)

9) A les caselles de l'escaquer escrivim les lletres A, B i C com mostra la figura següent:

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
···	A	C	B	A	C	···
···	B	A	C	B	A	···
···	C	B	A	C	B	···
···	A	C	B	A	C	···
···	B	A	C	B	A	···
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Després de cada moviment conforme a les regles donades, el nombre de fitxes que ocupen caselles marcades amb una de les lletres augmenta en 1, mentre que el nombre de fitxes que ocupen caselles marcades amb cada una de les altres dues lletres disminueix en 1. Per exemple, si una fitxa està en una casella marcada amb A i mata la veïna de la dreta, bota a una casella marcada B: aleshores, el nombre de fitxes en caselles marcades A disminueix en 1 (la fitxa que ha botat), el de fitxes en caselles marcades C també disminueix en 1 (la fitxa menjada), i el nombre de fitxes en caselles marcades B augmenta en 1 (la fitxa que ha botat ara està en una casella B). Per tant, si abans d'un moviment aquests nombres tenien la mateixa paritat, després del moviment això seguirà essent així. Aquest és el nostre invariant. Al començament els nombres eren iguals, perquè la longitud d'un dels costats del rectangle cobert per peons era divisible per 3. En conseqüència, tenien la mateixa paritat. Per tant, no es pot arribar a una situació en què un dels nombres sigui 1 i els altres dos 0.

10) Comencem assignant un 1 a cada vèrtex; canviant alguns 1 per -1 podem arribar a qualsevol configuració del cub. Ara, quan canviam un 1 per un -1 a un vèrtex, hi ha 4 sumands que canvien de signe: el vèrtex (passa de 1 a -1) i els tres productes de cares que contenen aquest vèrtex. D'aquesta manera, la paritat del nombre total de -1s es manté: els canvis possibles a la zona de els cares són

$$\{1,1,1\} \mapsto \{-1,-1,-1\}, \{1,1,-1\} \mapsto \{-1,-1,1\}, \{1,-1,-1\} \mapsto \{-1,1,1\},$$
$$\{-1,-1,-1\} \mapsto \{1,1,1\}$$

i per tant per aquest costat el nombre de -1s augmenta en tres, augmenta en un, disminueix en un o disminueix en tres, i com que a més afegim un -1 nou en el vèrtex que canviam, al final el nombre de -1s ha variat en un nombre parell.

Ara bé, al començament, tenim zero -1s, i si al final la suma ha de donar 0, hauríem de tenir set 1s i set -1s, i la paritat del nombre de -1s hauria hagut de canviar pel camí, la qual cosa no pot ser.

(Una altra manera, sense fer servir invariants: si tenim set 1s i set -1s, el producte dels 14 termes és -1. Però d'altra banda, com que el terme corresponent a cada cara és el producte dels seus quatre vèrtexs, i cada vèrtex apareix a tres cares, el producte dels 14 termes és el producte dels 8 termes corresponents als vèrtexs elevat a 4 (cada vèrtex hi apareix quatre vegades: una com a vèrtex i tres a les seves cares), que és 1).

11) Diguem n_i i v_i als nombres de cartes negres i vermelles, respectivament, que romanen a la taula després de i jugades. Tenim que $n_0 = v_0 = 13$. Les regles del joc impliquen que

$$v_i \equiv v_{i+1} \text{ mòdul } 2$$
$$2n_{i+1} + v_{i+1} < 2n_i + v_i$$

La primera condició (l'invariant) diu que tot el temps hi haurà un nombre imparell de cartes vermelles, i per tant com a mínim n'hi haurà una, mentre que la segona (el monovariant) implica que prest o tard haurem d'aturar, la qual cosa passa quan queda com a molt una carta. Per tant s'atura sempre i queda una carta vermella.

12) Diguem a_1 al punt on en començar hi ha un 1, i considerem la suma

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{3i+1} + 2a_{3i+2} + a_{3i+3})$$

Al començament, $S = 1$, i quan tot són zeros, $S = 0$. Ara, en un pas:

- Si el centre del trio canviat és de la forma a_{3i+1}, tenim que a_{3i+1} passa de 1 a 0, i $a_{3i} + 2a_{3i+2}$ passa de 0 a 3, de 1 a 2, de 2 a 1 o de 3 a 0. El global, conserva la paritat de S.

- Si el centre del trio canviat és de la forma a_{3i+2}, tenim que $2a_{3i+2}$ passa de 2 a 0, i $a_{3i+1} + a_{3i+3}$ passa de 0 a 2, de 1 a 1, o de 2 a 0. El global, conserva la paritat de S.

- Si el centre del trio canviat és de la forma a_{3i}, tenim que a_{3i} passa de 1 a 0, i $2a_{3i-1}+a_{3i+1}$ passa de 0 a 3, de 2 a 1, de 1 a 2 o de 3 a 0. El global, conserva la paritat de S.

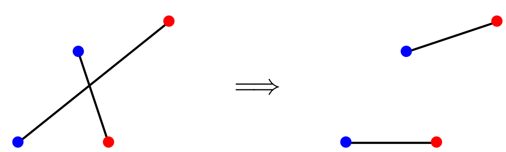
Per tant la paritat de S és invariant, i és impossible que passi de $S=1$ a $S=0$.

13) Diguem B i N als nombres de caselles blanques i negres que tenim en un moment determinat.

Si repintam tota una filera que tenia b caselles blanques i $8-b$ caselles negres, obtenim una filera amb $8-b$ caselles blanques i b caselles negres. Per tant $B-N \to (B-b+(8-b))-(N-(8-b)+b) = B-N+16-4b$. El mateix passa si repintam tota una columna. Finalment, si repintam un quadrat que tenia b caselles blanques i $4-b$ caselles negres, obtenim una quadrat amb $4-b$ caselles blanques i b caselles negres. Per tant $B-N \to (B-b+(4-b))-(N-(4-b)+b) = B-N+8-4b$.

Veiem per tant que cada repintada conserva la classe de congruència de $B-N$ mòdul 4. En començar, $B-N=0$, i si només queda una casella blanca, $B-N=62 \equiv 2$ mòdul 4. Per tant és impossible.

14) Comencem connectant de qualsevol manera els punts blaus amb els punts vermells, de manera que cada punt blau i cada punt vermell sigui incident amb un sol segment. Ara considerem l'operació següent: si dos segments es creuen, són les diagonals d'un quadrilàter de vèrtexs (en sentit antihorari) B, V, V, B (B=blau, V=vermell). Aleshores canviam les dues diagonals $B-V$ per dos costats $B-V$.



Per la desigualtat triangular, la suma de les longituds de dos costats oposats d'un quadrilàter és estrictament més petita que la suma de les diagonals (exercici!), i per tant amb aquesta operació la suma de les longituds dels segments decreix estrictament. Com que hi ha només un nombre finit de possibilitats d'unir punts blaus amb punts vermells, aquesta suma no pot decréixer indefinidament, i per tant prest o tard haurem d'aturar de poder aplicar l'operació: serà quan cap parella de segments es talli.

15) Suposem que hem escrit N nombres i que en un moment determinat encara en queden n.

- Si esborram un nombre, la quantitat de nombres que queden creix estrictament.
- Considerem l'altre cas. Suposem que esborram a, b, amb $a<b$, i que els substituïm pel seu mcd d i el seu mcm m. Com que b no és múltiple de a, tenim que $d<a<b<m$, i a més $ab=dm$. D'aquí deduïm que $a+b<d+m$. En efecte, $a(a+b)=ab+a^2=md+a^2<ad+am=a(d+m)$ (la darrera desigualtat és conseqüència de $(m-a)(a-d)>0$).

Per tant, a cada pas o la quantitat de nombres que queden decreix en 1, o la suma dels nombres que queden creixen estrictament. Com que el primer valor està fitat inferiorment (per 1) i el segon està fitat superiorment (per N vegades el producte de tots els nombres en començar), prest o tard haurem d'aturar.

16) Hi ha diverses maneres d'atacar aquest problema emprant invariants. Diguem a, b, c als nombres de camaleons grisos, marrons i vermells, respectivament, que hi ha en cada moment, i considerem el vector (a, b, c). Els encontres es tradueixen en:

- Si es troben un gris i un marró, $(a, b, c) \to (a-1, b-1, c+2)$
- Si es troben un gris i un vermell, $(a, b, c) \to (a-1, b+2, c-1)$
- Si es troben un marró i un vermell, $(a, b, c) \to (a+2, b-1, c-1)$

I ara fixau-vos que, mòdul 3, les tres operacions són la mateixa

$$(a, b, c) \to (a-1, b-1, c-1)$$

A partir d'ara, pensarem a, b, c mòdul 3. Ara tenim diversos arguments:

(1) Començam amb $(13, 15, 17) = (1, 0, 2)$. Quan efectuam una de les tres operacions, passa forçosament a $(0, 2, 1)$. Quan efectuam una de les tres operacions sobre aquest, passa forçosament a $(2, 1, 0)$. I quan efectuam una de les tres operacions sobre aquest, passa forçosament a $(1, 0, 2)$ i tornam a començar! Per tant, tota configuració possible de nombres de camaleons mòdul 3 és $(1, 0, 2)$, $(0, 2, 1)$ o $(2, 1, 0)$. Si acabassin tots del mateix color, d'un n'hi hauria 45 (que és 0 mòdul 3) i dels altres 0, i per tant acabaria en $(0, 0, 0)$. Impossible.

(2) Considerau qualsevol funció lineal $f(x, y, z) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$ tal que $f(-1, -1, -1) = 0$ mòdul 3; per exemple, $f(x, y, z) = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z$ mòdul 3. Aleshores el valor de $f(a, b, c)$ no varia amb els encontres. Però $f(1, 0, 2) = 1$ i $f(0, 0, 0) = 0$ mòdul 3, impossible.

(3) A cada encontre la diferència $a - b$ es manté, puja en 3 o baixa en 3. Per tant, la classe de congruència mòdul 3 de $a - b$ és un invariant. Al començament, és la classe de $13 - 15 \equiv 1$ mòdul 3, i al final és o bé la classe de ± 45 o la de 0, que és 0 sempre. Impossible.

17) Aquest problema, de competició, és similar al dels camaleons. No en donaré la solució.

18) Si en un moment determinat a l'estadi hi ha N persones, al cap d'un minut n'hi haurà $N + 1$ o $N - 2$, i fixau-vos que $N - 1$ i $N + 2$ són congruents mòdul 3. Al cap de 2 minuts, n'hi podrà haver $N + 2$, $N - 1$ o $N - 4$, i els tres possibles resultats són congruents mòdul 3. Per inducció, podem demostrar que

> *tots els possibles nombres de persones dins l'estadi al cap d'un nombre fixat de minuts són congruents mòdul 3.*

En efecte, després de 1 minut només hi ha un resultat possible (una persona a dins), per tant és veritat en aquest cas. Suposem ara que és veritat al cap de n minuts, i siguin N_{n+1} i N'_{n+1} dos possibles resultats al cap de $n + 1$ minuts. Aleshores

$$\begin{array}{l} N_{n+1} = N_n + 1 \text{ o } N_n - 2 \text{ per a qualque possible resultat } N_n \text{ al cap de } n \text{ minuts} \\ N'_{n+1} = N'_n + 1 \text{ o } N'_n - 2 \text{ per a qualque possible resultat } N'_n \text{ al cap de } n \text{ minuts} \end{array}$$

i per tant els possibles valors de $N_{n+1} - N'_{n+1}$ són $N_n - N'_n$, $N_n - N'_n - 3$, o $N_n - N'_n + 3$. Si per hipòtesi d'inducció suposam que $N_n - N'_n$ és divisible per 3, això implica que també ho és $N_{n+1} - N'_{n+1}$.

Ara bé, un dia té $24 \cdot 60 = 1440$ minuts, i per tant un possible nombre de persones a l'estadi al cap d'un dia és 1440 (si cada minut n'entra 1). Com que 1440 és divisible per 3, tot altre nombre possible de persones al cap d'un dia ha de ser divisible per 3, i 250 no ho és.

19) Quan canviam el signe de tots els elements d'una filera o una columna que tenia suma negativa, la suma d'aquella filera o columna passa a ser estrictament positiva, i per tant la suma de totes les entrades de la taula creix estrictament. Com que aquesta suma està fitada superiorment per la suma dels valors absoluts de les entrades de la taula, no pot créixer indefinidament, i per tant prest o tard haurem d'aturar.

20) Si la peça de partida és quadrada $m = n$, el segon té una estratègia guanyadora: cada vegada que el primer jugador xapi la pastilla i en deixi un tros, el segon jugador torna a xapar aquest tros perquè quedi quadrat. Al final, s'aturarà en una sola pastilla.

I per tant, si la peça no és quadrada, el primer és el que té una estratègia guanyadora: a la primera jugada, fa la pastilla quadrada, i els papers del primer i segon jugador s'han invertit.

Francesc Rosselló

Per qualsevol dubte, `cesc.rossello@uib.es`