Josep Lluís Pol i Llompart

Quan els múltiples i els divisors entren per la vista

(Múltiples i divisors a través de les matemàtiques, la física i... l'art?)

El següent vídeo presenta una situació de moviment armònic (pèndols) que atrau poderosament l'atenció. És vertaderament hipnòtic. Explicar-ho passa només per un concepte matemàtic tan elemental (però potser no tan senzill) com és el de múltiple/divisor.

https://www.youtube.com/watch?v=JsIgubUjTck

Abans de llegir la resta de l'article, potser et farà gràcia dur a terme la següent...

Proposta didàctica

1. Mira què dura un cicle complet (des del principi fins que totes les bolles tornin estar alineades).
2. Compta quantes oscil·lacions fa cada bolla en un cicle complet. (No és tanta feina com sembla)
3. Apunta els moments (aprox.) en què apareixen agregats singulars, és a dir, files de bolles (2, 3...)
4. Resta 4 s (que és quan el cicle comença) a cada moment apuntat a l'apartat 3.
5. Descobreix com aquests moments corresponen (aprox.) a fraccions simples del temps total (86 s)!

Recollida de dades

Comencem per mirar quant de temps passa entre l'inici de l'oscil·lació i el moment en que totes les bolles tornen estar (aproximadament) alineades. Aquestes dues dades són:

Inici: 0:04
Final: 1:30 Això dóna un temps d'oscil·lació global de 86 s.

Mirem ara quantes oscil·lacions fa cada bolla.

La groga de més aprop, B1, realitza 53 oscil·lacions.
La segona bolla, blava, B2, realitza 54 oscil·lacions.
La tercera bolla, vermella, B3, realitza 55 oscil·lacions.
....
No cal comptar més. Comprovem simplement que...
...la darrera bolla, de franja roja, B15, realitza 67 oscil·lacions.

No és magnífic? (Si ho pensam bé, no podia ser d'altra manera)

Per què com més a prop, més lentes van les bolles?

Això s'aconsegueix variant la longitud de les cordes. Per això, si ens hi fixam, com més lluny estan les bolles, més curt és el seu cordill (suposant que totes pengen de la mateixa alçada).

(El model físic que ho explica ens diu que el que tarda un pèndol en realitzar una oscil·lació completa s'anomena període (T) i que aquest està en relació directa a l'arrel quadrada de la longitud del pèndol.) $T \simeq k \, . \sqrt{l}$

Si ja sabem quantes oscil·lacions (n) fan totes les bolles en 86 segons, podem calcular el període (T) de cada una, és a dir, quant de temps tarda en fer 1 oscil·lació completa

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
T(s)	1,62	1,59	1,56	1,54	1,51	1,48	1,46	1,43	1,41	1,39	1,37	1,34	1,32	1,30	1,28

Fem ara, algunes consideracions matemàtiques senzilles i tornem a mirar el video.

1. *Quantes oscil·lacions haurà fet cada bolla a la meitat del temps? Això passarà per dividir el nombre d'oscil·lacions totals de a cada bolla entre 2.*

1a bolla. Si en 86 s feia 53 oscil·lacions, en 43 s en farà 26,5. Això vol dir que aquesta mitja oscil·lació que passa de 26 la col·locarà a l'altre costat de la posició de sortida.

2a bolla. Si en 86 s feia 54 oscil·lacions, en 43 s en farà 27. Això vol dir que aquesta bolla sí que estarà a la mateixa posició de sortida.

I per tant, aquesta situació s'anirà alternant segons partim d'un nombre parell o senar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
26,50	**27,00**	**27,50**	**28,00**	**28,50**	**29,00**	**29,50**	**30,00**	**30,50**	**31,00**	**31,50**	**32,00**	**32,50**	**33,00**	**33,50**

Visualment, 43 segons després d'haver començat el moviment (04+43 = minut 0:47) haurem de veure les bolles de posició imparell a l'esquerra i les de posició parell a la dreta. És a dir, dues files de bolles. Comprovem-ho!

Això ens indica, com ja sabíem, que 2 és un divisor comú de 54, 56, 58, 60, 62, 64 i 66. (Dit d'una altra manera, que 43 s és un múltiple comú de tots els periodes de les bolles que estan en posició parell.)

Si tornam mirar el video, comprovarem que aquesta situació no s'ha produït cap altra vegada durant els primers 43 s. Per tant, 2, a més de ser un comú divisor dels nombres parells, serà el màxim comú divisor. (Dit d'una altra manera, 43 és el mínim comú múltiple dels periodes de les bolles que estan en posició parell.)

2. *Quantes oscil·lacions haurà fet cada bolla en un terç del temps total? Això passarà per dividir el nombre d'oscil·lacions totals de a cada bolla entre 3.*

1a bolla. Si en 86 s feia 53 oscil·lacions, en 28,67 s en farà 17.67. Això vol dir que la bolla estarà de tornada cap a la posició inicial.

2a bolla. Si en 86 s feia 54 oscil·lacions, en 28.67 s en farà 18. Això vol dir que estarà a la mateixa posició de sortida.

3a bolla. Si en 86 s feia 55 oscil·lacions, en 28.67 s en farà 18.33. Això vol dir que la bolla estarà de camí cap a l'altre costat.

4a bolla. Si en 86 s feia 56 oscil·lacions, en 28.67 s en farà 18.67. Això vol dir que la bolla estarà de tornada cap a la posició inicial.

Per tant, en 28.67 s tendrem només tres posicions diferents que ocuparan les bolles alternament.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67
17,67	18,00	18,33	18,67	19,00	19,33	19,67	20,00	20,33	20,67	21,00	21,33	21,67	22,00	22,33

Visulament, quan hagin passat quasi 28.67 segons (04+29 = minut 0:33), haurem de veure 3 línies de bolles. Comprovem-ho!

Això ens indica, com ja sabíem, que 3 és un divisor comú de 54, 57, 60, 63 i 66. (Dit d'una altra manera, que 28.67 és un múltiple comú de tots els periodes de les bolles que estan en posició 1, 4, 7, 10 i 13.)

Si tornam mirar el video, comprovarem que aquesta situació no s'ha produït cap altra vegada durant els primers 28.67 s. Per tant, 3, a més de ser un comú divisor dels nombres citats, serà el màxim comú divisor. (Dit d'una altra manera, 28.67 és el mínim comú múltiple dels periodes de les bolles corresponents.)

El mateix podríem fer dividint el temps total per 4, per 5... T'animes?

Conclusions

Estam davant una manera magnífica de veure com es poden captar els termes divisors i múltiples mitjançant la vista i sense conceptes previs.

La seqüència de punts singulars visibles quedaria de la següent manera:

0.04 Inici (una fila de bolles)
0:21.2 Un cinquè (no és fàcil de veure, però s'intueix)
0:25.5 Un quart (es veuen quatre files)
0:32.67 Un terç (es veuen tres files)
0:38.4 Dos cinquès (no és fàcil de veure, però s'intueix)
0:47 La meitat (es veuen perfectament les dues files) (coïncideix amb les dos quarts)
0:55.6 Tres cinquès (no és fàcil de veure, però s'intueix)
1:01.33 Dos terços (es veuen tres files)
1:08.5 Tres quarts (es veuen quatre files)
1:12.8 Quatre cinquès (no és fàcil de veure, però s'intueix)
1:30 Final (totes les bolles tornen ser a la posició inicial)

Entendre aquest moviment és un bon entrenament per entendre l'harmonia de la música ja que la freqüència de les notes musicals, els seus acords (el que fa que uns acords sonin bé i altres no), i els harmònics dels sons (el que defineix els timbre dels instruments) s'expliquen en aquests termes.

De la mateixa manera que en el vídeo hi ha moments en què les posicions de les bolles "encaixen", els sons les freqüències dels quals compleixen relacions senzilles (dobles, triples, quàdruples...) també encaixen, és a dir, sonen bé. Però això ja serà un altre article...