Mostra de solució.
Problema 20
Miquel Amengual Covas

Sigui $\triangle ABC$ un triangle, sigui D el segon punt d'intersecció de la bisectriu de l'angle BAC amb el circumcercle del triangle ABC i siguin B' i C' els respectius peus de les perpendiculars a la bisectriu AD tirades des dels vèrtexs B i C. Demostrau que

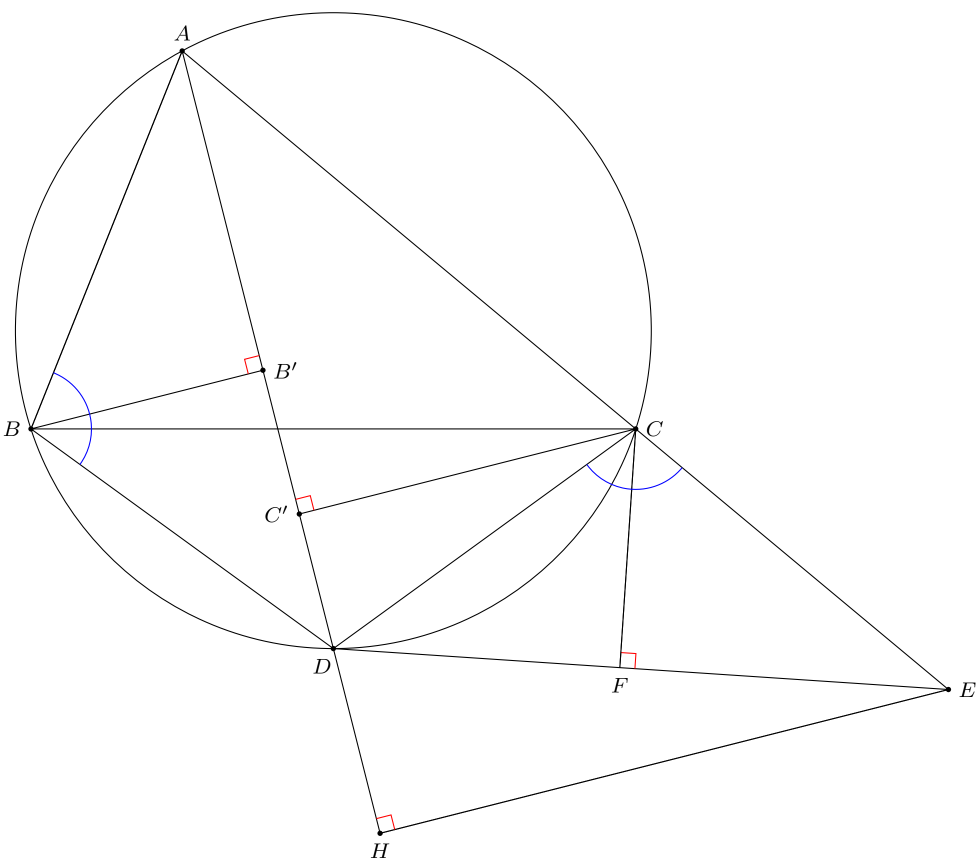
$$AD \geq BB' + CC'$$

En quines condicions hi ha igualtat?

PROVA. Sigui E el punt sobre AC, a continuació de C, tal que $CE = AB$. Atès que D és el punt mitjà de l'arc BC (que no conté A) de la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$, els arcs BD i DC són iguals. En conseqüència, les cordes BD i DC són iguals.

És a dir:

$$BD = DC.$$



Tenint en compte que els punts A, B, D, C són concíclics, serà $\angle ABD = \angle DCE$. Aleshores, els triangles ABD i DCE són iguals, ja que tenen iguals, respectivament, dos costats i l'angle que formen. Per tant, qualsevol segment de $\triangle ABD$ tendrà la mateixa longitud que el corresponent segment de $\triangle DCE$. En particular,

$$AD = DE$$

i, si designem per F el peu de la perpendicular des de C a DE,

$$CF = BB'.$$

Com que $AD = DE$, si H designa el peu de la perpendicular des de E a AD, resulta

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}AD \cdot EH &= \text{àrea } \triangle ADE \\
&= \text{àrea } \triangle ADC + \text{àrea } \triangle CDE \\
&= \tfrac{1}{2}AD \cdot CC' + \tfrac{1}{2}DE \cdot CF \\
&= \tfrac{1}{2}AD \cdot (CC' + CF)\,,
\end{aligned}$$

d'on deduïm que

$$CC' + CF = EH.$$

Per tant:

$$BB' + CC' = CF + CC' = EH \leq DE = AD,$$

com es volia.

La igualtat només val si $\angle ADE = 90°$. Això implica que $\angle BAC = 90°$.

Aquest problema, proposat pel qui subscriu, va ser publicat al número 24 (novembre 2007) de la revista *Notícies SCM* de la Societat Catalana de Matemàtiques. La que es presenta aquí n'és una solució purament euclídia. Una solució diferent fou publicada al número 25 (juny 2008) de l'esmentada revista.