Mostra de solució.
Problema 2.2
Miquel Amengual Covas

Demostrau que si a, b i c són les longituds dels costats d'un triangle, aleshores es compleix que

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{8}$$

Transformem la suma $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$ en producte. Es té:

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} &= \frac{(a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(a+b)(c+a)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&= \frac{(c+a)[(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)]+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&= \frac{(c+a)\cdot 2b(a-c)+(c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&= \frac{(a-c)(2b(c+a)-(a+b)(b+c))}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&= \frac{(a-c)\left(bc+ab-b^2-ac\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&= \frac{(a-c)(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Com que a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle,

$$|a-b|<c, \quad |b-c|<a, \quad |c-a|<b,$$

i, per tant,

$$|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|<abc. \tag{2}$$

D'altra banda, de la desigualtat $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, on x, y són nombres reals positius qualssevol, se'n dedueixen les desigualtats

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c\geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a\geq 2\sqrt{ca},$$

que impliquen

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a)\geq 8abc. \tag{3}$$

De (1), (2) i (3) es desprèn que

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}<\frac{abc}{8abc}=\frac{1}{8},$$

com es volia.

Vegem tot seguit que la fita $\frac{1}{8}$ es pot millorar. No és restrictiu suposar $a < b < c$ i, canviant d'escala la longitud, podem suposar $a = 1$. Quedarà:

$$a = 1, \qquad b = 1 + u, \qquad c = 1 + u + v,$$

on u, v són nombres reals positius.

Amb aquestes notacions, l'expressió $\left|\frac{(a-c)(a-b)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$ es pot escriure en la forma

$$\frac{uv\,(u+v)}{(2+u)\,(2+2u+v)\,(2+u+v)}. \tag{4}$$

Al seu torn,

$$c < a + b.$$

Substituint aquí a, b, c per les seves expressions, aquesta desigualtat s'escriu

$$1 + u + v < 1 + 1 + u,$$

d'on deduïm que

$$v < 1. \tag{5}$$

Tenint present (4) i (5), ens quedarà, finalment,

$$\left|\frac{(a-c)\,(a-b)\,(b-c)}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}\right| < \frac{u \cdot 1 \cdot (u+1)}{(2+u)\,(2+2u)\,(2+u)} = \frac{u}{2\,(2+u)^2} \leq \frac{1}{16},$$

ja que la desigualtat de la dreta és equivalent a la desigualtat òbvia $(2-u)^2 \geq 0$.

Mitjançant tècniques de càlcul diferencial, a [1] es demostra el fet que la fita òptima és

$$\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \simeq 0.044456.$$

Qui vulgui coneixer l'història d'aquest problema pot acudir a [2].

Referències

[1] D. S. Mitrinović, 'Problem 1080', Crux Mathematicorum, (1986), 11; (1987), 67-68.

[2] Fauring, P. [*et al.*]. *10 Matemáticos, 100 Problemas.* 1a ed. Rio de Janeiro: Associaçao Olimpíada Brasileira de Matemática, 2008.