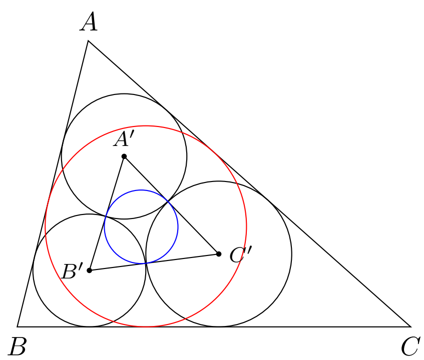
Mostra de solució.
Problema 1.2
Miquel Amengual Covas

Si indiquem per r' el radi de la circumferència inscrita en $\triangle A'B'C'$, volem provar la desigualtat

$$r \geq \left(1+\sqrt{3}\right) r'$$

i, a més, que la igualtat es compleix només quan $r_1 = r_2 = r_3$.



Com que les longituds dels costats de $\triangle A'B'C'$ són r_1+r_2, r_2+r_3, r_3+r_1 i el seu semiperímetre és $r_1+r_2+r_3$, es compleix que

$$r'\left(r_1+r_2+r_3\right) = \text{àrea } \triangle A'B'C' = \sqrt{\left(r_1+r_2+r_3\right) r_1 r_2 r_3},$$

d'on deduïm que

$$r' = \frac{\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1+r_2+r_3}}. \tag{1}$$

Ara bé, al problema 1.1 hem obtingut l'expressió de r en funció de r_1, r_2 i r_3. En virtut d'aquella expressió,

$$r = \frac{\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1+r_2+r_3}\right)\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1 r_2}+\sqrt{r_2 r_3}+\sqrt{r_3 r_1}}. \tag{2}$$

Comparant (1) amb (2), veiem que

$$\frac{r}{r'} = \frac{2\sqrt{r_1+r_2+r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1+r_2+r_3}}. \tag{3}$$

D'altra banda, de la desigualtat $3\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq (x+y+z)^2$ (per provarla, només cal tenir en compte que aquesta desigualtat és equivalent a $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$) aplicada a $x=\sqrt{r_1}$, $y=\sqrt{r_2}$, $z=\sqrt{r_3}$, s'en dedueix que

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} \leq \sqrt{3\left(r_1+r_2+r_3\right)}.$$

Tenint això present, l'expressió (3) esdevé

$$\frac{r}{r'} \geq \frac{2\sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{\sqrt{3\left(r_1 + r_2 + r_3\right)} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}.$$

Simplificant obtenim la desigualtat següent, equivalent a la desigualtat volguda:

$$\frac{r}{r'} \geq \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = 1 + \sqrt{3}.$$

La igualtat esdevé si, i només si, $r_1 = r_2 = r_3$.